

Högrekvensteknik i sammandrag

Kursbok Cheng: Fundamentals of engineering electromagnetics

Eva Palmberg

Institutionen för Radio- och rymdvetenskap
Chalmers tekniska högskola

2005

Innehåll

1	Vågor på ledningar	1
	Inledning	1
1.1	Sinusformat stationärtillstånd	1
1.1.1	Spänning, ström och impedans	1
1.1.2	Förlustfria ledningar	2
1.1.3	Förlustfria ledningar som kretselement	3
1.1.4	Spänningsmax och -min på ledning	3
1.1.5	Beräkning av C_ℓ , L_ℓ , G_ℓ och R_ℓ	3
1.1.6	TEM-våg på dubbelledning med tjocka ledare*	4
1.2	Transienter	5
1.2.1	Inledning	5
1.2.2	Spänning och ström på ledningen	5
1.2.3	Reflexionsdiagram	6
1.2.4	Andra belastningar och insignaler. - Laplacetransformering	6
1.2.5	Spänning och ström på ledningen	7
1.2.6	Ledningar med begynnelseenergi*	9
1.2.7	Flera ledningar*	9
1.3	Smithdiagram	10
1.3.1	Impedansdiagram - Härledningar	10
1.3.2	Stående vågförhållande	12
1.3.3	Admittansdiagram	12
1.3.4	Anpassning	13
1.3.5	Smithdiagram sammanfattning	13
2	Vågledare	14
2.1	Rektangulära vågledare	14
2.1.1	Ideal rektangulär vågledare	14
2.1.2	Små förluster i vågledare	15
2.1.3	Allmänt om grupp hastighet	15
2.1.4	Utbredning mellan parallella plan	16
2.1.5	Rektangulär hålrumsresonator	16
2.1.6	Beteckningar för olika typer av vågor	17
2.2	Cirkulära vågledare	18
2.2.1	Cirkulära vågledare	18
2.2.2	Cirkulär hålrumsresonator	20
2.3	Dielektriska vågledare	20
2.3.1	TM-vågor	20
2.3.2	TE-vågor	22
2.3.3	Gränsfrekvenser	24
2.3.4	Dielektrisk skiva på metallplan	24
3	Antenner	25
3.1	Hertzdipol	25
3.1.1	Strålningsdiagram	26
3.2	Sprötanter	27
3.3	Strålningsresistans	27
3.4	Antennförluster	28
3.5	Gruppantenn	28
3.6	Antennförstärkning mm	29
3.6.1	Sändarantenn	29
3.6.2	Mottagarantenn	29
3.6.3	Sändare och mottagare	30
3.6.4	Samma antenn som sändare och mottagare	30

Index	31
--------------	-----------

Kapitel 1

Vågor på ledningar

Inledning

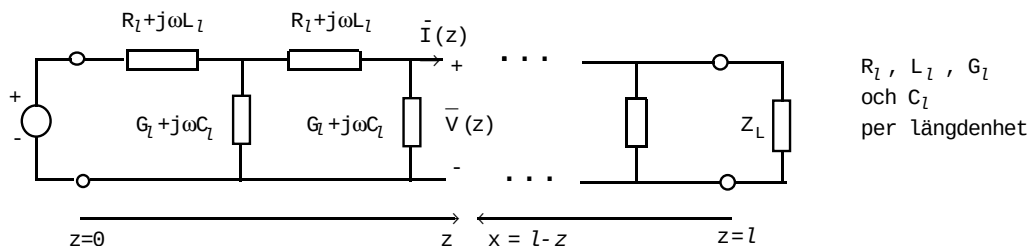
I kursen Elektromagnetiska fält (Cheng kap 1-7) har vi bl. a. studerat vågutbredning i fri rymd. En antenn som strålar lika i alla riktningar blir dock ineffektiv för överföring av energi mellan två punkter. Det blir bättre om vi kan leda energin på något sätt. I detta kapitel tittar vi på ledningar, t.ex. två parallella ledare, för överföringen. Vi får transversella fält på ledningen s.k. TEM-vågor (transversellt elektriskt och magnetiskt fält). Senare kommer vi till vågledare (t.ex. metallrör som kan överföra energi). Där har vi TE- eller TM-vågor (transversellt elektriskt resp. magnetiskt fält).

En transmissionslinje används för att överföra energi vid höga frekvenser från en källa till en belastning. Om våglängden $\lambda = c/f \gg$ kretsens dimensioner, kan vi använda vanlig kretsräkning med Kirchhoffs lagar. – $f = 50$ Hz ger $\lambda = 600$ m, FM-radio $f = 100$ MHz ger $\lambda = 3$ m. –

För mindre våglängder (högre frekvenser) måste vi använda **ledningsteori**. Vi kan studera **E- och H-fälten** runt ledarna (huvudsakligen transversella fält, men inga plana vågor) **eller** räkna kretsmässigt med **ström och spänning**. Man får **spännings- och strömvågor** på ledningen.

1.1 Sinusformat stationärtillstånd

1.1.1 Spänning, ström och impedans



Vi studerar det sinusformade stationärtillståndet för en ledning med längden ℓ , impedansen/längdenhet $R_\ell + j\omega L_\ell$, admittansen/längdenhet $G_\ell + j\omega C_\ell$ och belastningsimpedansen Z_L , symboliskt ritad i figuren ovan:

Lösningarna till de differentialekvationer man får för den komplexa spänningen resp. strömmen på ledningen blir

$$\bar{V}(z) = \bar{V}^+(z) + \bar{V}^-(z) = \bar{V}^+(0)e^{-\gamma z} + \bar{V}^-(0)e^{\gamma z} = [1 + \Gamma(z)] \bar{V}^+(z)$$

framåt- och bakåtgående spänningsvåg

$$\bar{I}(z) = \bar{I}^+(z) + \bar{I}^-(z) = \bar{I}^+(0)e^{-\gamma z} + \bar{I}^-(0)e^{\gamma z} = [1 - \Gamma(z)] \bar{I}^+(z)$$

fram- och bakåtgående strömvåg

där **utbredningskonstanten** för utbredning längs ledningen

$$\gamma_{\text{ledning}} = \alpha_{\text{ledning}} + j\beta_{\text{ledning}} = \sqrt{(R_l + j\omega L_l)(G_l + j\omega C_l)}$$

index **ledning**
utelämnas normalt

En förlustfri ledning har $R_\ell = 0$ och $G_\ell = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Fas hastighet på ledningen $v_{\text{fas,ledning}} = \omega/\beta_{\text{ledning}}$

Den **karakteristiska impedansen** för ledningen

$$Z_c = \frac{\bar{V}^+(z)}{\bar{I}^+(z)} = -\frac{\bar{V}^-(z)}{\bar{I}^-(z)} = \sqrt{\frac{R_l + j\omega L_l}{G_l + j\omega C_l}}$$

För en förlustfri ledning gäller att $Z_c = \sqrt{L_\ell/C_\ell}$, d.v.s. rent reell.

Reflexionsförhållandet för spänningstågen

$$\Gamma(z) = \frac{\bar{V}^-(z)}{\bar{V}^+(z)} = \Gamma_L e^{2\gamma(z-l)}$$

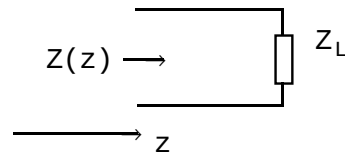
med reflexionsförhållandet vid **belastningen** = **reflexionskoefficienten** vid belastningen:

$$\Gamma_L = \Gamma(l) = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c},$$

Specialfall, **anpassad ledning**: Om $Z_L = Z_c$ blir $\Gamma_L = 0$. Ingen reflekterad våg då!

Totalimpedansen $Z(z)$ = inimpedansen (vid $z=z$) mot belastningen

$$Z(z) = \frac{\bar{V}(z)}{\bar{I}(z)} = Z_c \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$



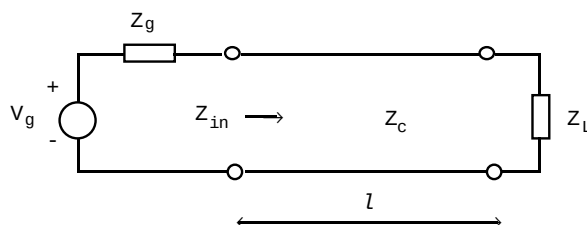
Några speciella värden på totalimpedansen: Vid belastningen $z=l$, $Z(l) = Z_L$ och vid $z=0$, $Z(0) = Z_{in}$ = inimpedansen på ledningen!

Beräkning av inimpedansen för ledningen:

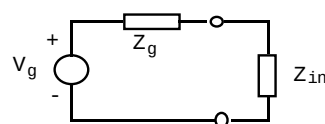
1/ Beräkning då Z_L och Z_c är kända
Beräkna Γ_L , $\Gamma(z)$, $Z(z)$ samt $Z(0) = Z_{in}$!

2/ Inimpedansen kan också beräknas ur

$$Z_{in}(x) = Z_c \frac{Z_L \cosh \gamma x + Z_c \sinh \gamma x}{Z_c \cosh \gamma x + Z_L \sinh \gamma x} \quad \text{med } x=l \text{ (x mätes från belastningen, se fig.)}$$



ekvivalent krets från generatoren sett



Vid lasten och generatoren: använd vanlig elkrets (KVL, KCL, spänningsdelning, anpassning osv.); däremellan ledningsteori.

OBS! Vid **förlustfri** ledning överföres all aktiv **effekt** in på ledningen vidare till lasten. Effekten i Z_L kan därför beräknas enklare som effekten i Z_{in} !

1.1.2 Förlustfria ledningar

För en förlustfri ledning gäller $R_l = 0$ och $G_l = 0$. Detta medför att Z_c blir rent reell och att

$$\gamma_{ledning} = j\beta_{ledning} = j\omega\sqrt{L_l C_l} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}.$$

$\alpha_{ledning} = 0$, ingen dämpning på ledningen och samma β som för plana vågor i förlustfritt material!

Några **specialfall** av inimpedans på en **förlustfri** ledning:

$\lambda/4$ lång ledning

$$Z_{in \lambda/4} = Z_c^2 / Z_L$$

$\lambda/2$ lång ledning

$$Z_{in \lambda/2} = Z_L$$

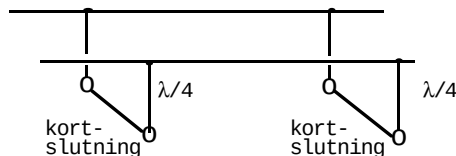
1.1.3 Förlustfria ledningar som kretselement

En förlustfri öppen ledning ($Z_L = \infty$) har $Z_{in} = \frac{Z_c}{j \tan \beta l}$
och en kortsluten ($Z_L = 0$) har $Z_{in} = Z_c j \tan \beta l$.

Genom lämpligt val av ledningslängden l , kan dessa båda fungera som rent induktiv eller kapacitiv impedans.

En kortsluten ($Z_L = 0$), förlustfri, $\lambda/4$ lång ledning har inimpedansen $Z_{in} = Z_c^2/0 = \infty$.

En sådan ledning kan användas som stöd för en annan ledning, utan att påverka denna!



1.1.4 Spänningsmaximum och -minimum på förlustfri ledning

Teckna den komplexa spänningen i en godtycklig punkt z på ledningen:

$$\bar{V}(z) = \bar{V}^+(z) + \bar{V}^-(z) = \bar{V}^+(z) [1 + \Gamma(z)] = \bar{V}^+(z) [1 + |\Gamma_L| e^{j\angle\Gamma_L + j2\beta(l-z)}]$$

Beloppet av $\bar{V}$ är max då $e^{j\cdots} = 1$ och min då $e^{j\cdots} = -1$.
Ur detta kan vi beräkna vid vilket z vi har $V_{\max}$ resp $V_{\min}$.

I en maxpunkt är $\Gamma(z) = + |\Gamma_L|$
" " minpunkt " $\Gamma(z) = - |\Gamma_L|$

Ståendevågförhållandet s för spänningen på en förlustfri ledning definieras som

$s = |\bar{V}|_{\max} / |\bar{V}|_{\min}$:

$$s = \frac{|\bar{V}|_{\max}}{|\bar{V}|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} \quad \text{eller} \quad |\Gamma_L| = \frac{s-1}{s+1}$$

Ingen reflekterad våg ($\Gamma_L = 0$), $\Rightarrow s = 1$

För en ledning med **små förluster** får man huvudsakligen **TEM**-vågor - transversella E- och H-fält. Men E och H beror av koordinater $\perp$ utbredningsriktningen, så det är inga plana vågor.

$$\beta \approx \omega \sqrt{L_l C_l} \quad \text{och} \quad v_{\text{fas}} = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_d \epsilon_d}} \quad \mu_d, \epsilon_d \text{ för dielektrikum mellan ledarna}$$

Detta samband, som gäller för en ledning med inga eller små förluster, kan man använda för att beräkna ledningens induktans/längdenhet L_ℓ , om C_ℓ är känd!

1.1.5 Beräkning av C_ℓ , L_ℓ , G_ℓ och R_ℓ

C_ℓ , G_ℓ och L_ℓ (kapacitans/längdenhet osv) beräknas som för statiska fält.

Observera att vid lika fältbild gäller $G_\ell = \sigma_d C_\ell / \epsilon$ (Formelsamlingen s.3) och sambandet i v_{fas} ovan mellan L_ℓ och C_ℓ vid inga eller små förluster.

Vid beräkningen av R_ℓ måste vi ta hänsyn till **eventuell skineffekt** i ledarna!

Exempel: För en koaxialkabel (ledarradier a resp. b , konduktivitet σ och ett dielektrikum (med ϵ och σ_d) mellan ledarna får vi kapacitans/l.e. (se cylinderkondensator t.ex. i Phys. Handb.), tvärkonduktans/l.e. och induktans/l.e.:

$$C_l = \frac{2\pi\epsilon}{\ln b/a} \quad G_l = \frac{\sigma_d C_l}{\epsilon} = \frac{2\pi\sigma_d}{\ln b/a} \quad L_l = \frac{\mu_0 \epsilon}{C_l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln b/a$$

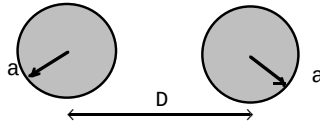
Om vi har skineffekt blir serieresistansen/l.e. för ledarna

$$R_l = \frac{1}{2\pi\sigma a\delta} + \frac{1}{2\pi\sigma b\delta} \quad \text{där } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \quad \text{inträngningsdjupet.}$$

Vi har räknat med **hög** frekvens. Då har man inget flöde inne i ledarna, d.v.s. ingen **inre** induktans för ledarna. Vi har antagit små förluster dessutom.

1.1.6 TEM-våg på dubbelledning med tjocka ledare*

Betrakta en dubbelledning med tjocka cylindriska ledare, radie a och centrumavstånd D , se fig.!



a/ Beräkning av kapacitans och induktans för ledningen

För en TEM-våg i $\hat{z}$ -riktningen gäller att $\vec{E} = Z\vec{H} \times \hat{z}$. $\vec{E}$ - och $\vec{H}$ -fälten är vinkelräta mot varandra. Vidare är $v_{fas} = 1/\sqrt{\mu_d \epsilon_d}$.

$\vec{E}$ -fältet ser ut som i elektrostatiken. Den ojämna ytladdningsfördelningen på cylinderytorna tar vi härsyn till genom att räkna med spegelladdningar $\pm\rho_l$ i spegelpunkterna. Vi får kapacitansen per längdenhet (se t.ex. ekv. 3-164 i Cheng)

$$C_l = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left[(D/2a) + \sqrt{(D/2a)^2 - 1}\right]} \quad (1)$$

I elektrostatiken är $V=\text{konst}$ -linjerna (cirklar) vinkelräta mot $\vec{E}$ -linjerna (också cirklar om man förlänger $\vec{E}$ -linjerna till spegelpunkterna), se fig. 1!

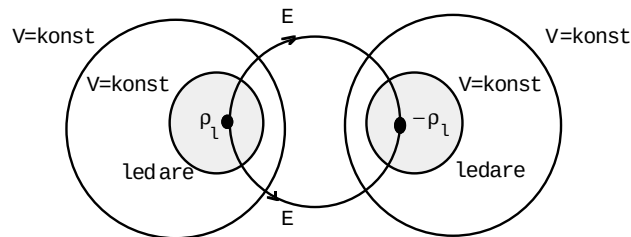


Fig.1 Elektrostatiskt fält

För **TEM-vågor** på dubbelledning får vi: $\vec{E}$ -linjer som i elektrostatiken (ojämn ytladdningsfördelning på de strömförande ledarnas yta). $V=\text{konst}$ -linjer i elektrostatiken motsvaras nu av $\vec{H}$ -linjer, ty $\vec{E} \perp \vec{H}$ för TEM-våg enligt inledningen. Se fig. 2! Ytströmtätheten på ledarna (i flyter ju på ledarytan vid skineffekt) blir inte jämnt fördelad. Vi får rätt fältbild, om vi räknar med tunna spegelströmlinor (med strömmen i) belägna i spegelpunkterna.

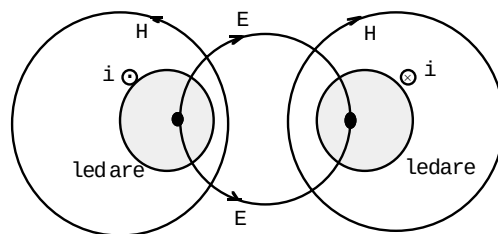


Fig.2 $\vec{E}$ och $\vec{H}$ för TEM-våg på ledning (skineffekt i ledarna)

Kapacitans för dubbelledningen, se ekv. (1). Induktansen får man enklast ur sambandet för TEM-vågor

$$v_{fas} = 1/\sqrt{L_l C_l} = 1/\sqrt{\mu_d \epsilon_d}$$

$$L_l (\text{yttre}) = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left[(D/2a) + \sqrt{(D/2a)^2 - 1}\right] = \frac{\mu_0}{\pi} \text{arcosh}(D/2a)$$

– Man kan också räkna med strömmen i i spegelpunkterna och använda definitionen för induktans för att beräkna L_{yttre} . –

b/ Beräkna den **magnetiska kraften** på en av de strömförande cylindrarna, t.ex. den högra! Vi förutsätter växelström och skineffekt.

Vi får rätt B-fält vid den högra ledaren, om vi ersätter den vänstra tjocka cylindern med en tunn ledare i spegelpunkten. Det blir dock komplicerat att beräkna kraften på den tjocka högra ledaren.

Men kraft och motkraft är lika. Vi kan beräkna kraften på den tunna vänstra ledaren i stället. Vid denna beräkning kan man ersätta den högra cylindern med en tunn ledare i spegelpunkten. Slutsatsen blir att vi kan beräkna kraften som kraft mellan två tunna strömförande ledare belägna i **spegelpunkterna**.

Kommentar: Vid **likström** har man **jämn strömfördelning** över de tjocka cylindrarnas tvärsnittsytta. B-fältet blir då samma som om man hade tunna ledare efter cylinderaxlarna. Kraften mellan de strömförande cylindrarna vid likström kan beräknas som kraften mellan två tunna trådar belägna på **cylinderaxlarna**.

Problemet blir alltför komplicerat, om man har växelström, men ej skineffekt.

1.2 Transienter på förlustfria ledningar

1.2.1 Inledning

I sektion 1.1 studerade vi sinusformat stationärtillstånd på ledningen och utnyttjade $j\omega$ -metoden. Nu ska vi titta på insvängningsförlopp och använda Laplacekalkyl. Vissa begrepp i sektion 1.1 blir meningslösa nu, t.ex. våglängd och fas, andra modifieras. $j\omega$ byts mot s .

Utbredningskonstanten $\gamma(s) = \sqrt{(R_l + sL_l)(G_l + sC_l)}$,

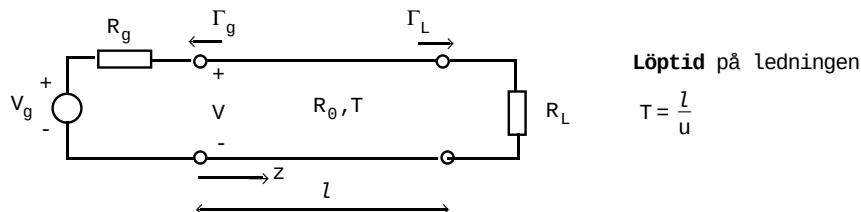
karakteristiska impedansen $Z_c(s) = \sqrt{(R_l + sL_l)/(G_l + sC_l)}$

(R_l, L_l, G_l, C_l storheter/längdenhet)

För en **förlustfri** ledning ($R_l=0, G_l=0$) blir karakteristiska impedansen $Z_c = R_0 = \sqrt{L_l/C_l}$, $\gamma(s) = s\sqrt{L_l C_l}$ och vågornas utbredningshastighet $u = 1/\sqrt{L_l C_l} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

1.2.2 Spänning och ström på ledningen

Koppla in en likspänningsgenerator med inre resistansen R_g och spänningen $V_g = V_0$ vid tiden $t=0$! Ledningen har en rent resistiv last R_L , se fig.! Vi har bara resistanser i kretsen, så vi behöver inte använda Laplacekalkyl.



Man kan beskriva ledningen genom att ange karakteristisk impedans R_0 och löptid T (eller ledningslängd l och hastighet u).

Spänningsdelning ger spänningen in på ledningen V_1^+ vid $z=0$ för $t=0$:

$$V_1^+ = \frac{R_0}{R_g + R_0} V_g \quad (\text{Man ser en } \infty \text{ lång ledning i detta ögonblick. Inimpedansen på ledningen är då } R_0)$$

En spänningsvåg utbreder sig efter ledningen. Vid tiden $t=T=l/u$, löptiden, reflekteras vågen mot belastningen.

Vi får en reflekterad våg $V_1^- = \Gamma_L V_1^+$, där $\Gamma_L = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$.

Efter tiden $2T$ har denna våg nått ingången på ledningen och reflekteras med reflexionsfaktorn Γ_g . Vi får en framåtgående våg V_2^+ .

$$V_2^+ = \Gamma_g V_1^- \quad \Gamma_g = \frac{R_g - R_0}{R_g + R_0}.$$

På detta sätt fortsätter reflexionerna i all oändlighet. Eftersom $|\Gamma| < 1$ (utom för $R_L = 0$ eller ∞ när $R_g = 0$) får vi avtagande amplitud på de reflekterade vågorna. Efter oändligt lång tid har vi **stationärtillstånd** i kretsen.

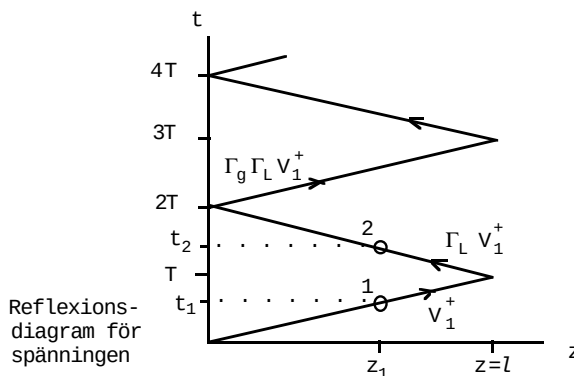
Den förlustfria ledningen verkar i stationärtillståndet som en kortslutning mellan generator och last.

1.2.3 Reflexionsdiagram

Man brukar rita ett **reflexionsdiagram** (rum-tid-diagram) för att lätt kunna se hur många vågor, som kommit fram till en viss punkt z på ledningen vid en viss tidpunkt t . Se diagrammet nedan!

OBS! Spänningsvågen reflekteras med faktorn $+\Gamma_L$ och $+\Gamma_g$, **strömvågen** med $-\Gamma_L$ och $-\Gamma_g$!

Se t.ex. uttrycken för $\bar{V}(z)$ och $\bar{I}(z)$ på s 1.



Figuren ovan visar ett diagram för spänningen. V_1^+ är den första framåtgående vågen som kommer till belastningen vid tiden T . Vågen reflekteras mot lasten med faktorn Γ_L : $V_1^- = \Gamma_L V_1^+$. Denna våg kommer till generatoren vid $t=2T$. Reflekteras där

Avläsning av spänningen: I en punkt z_1 vid en tidpunkt t , där $t_2 < t < 2T$ – se tidaxeln i diagrammet – har man totalt

$$V(z_1, t) = V_1^+ \sigma(t - t_1) + \Gamma_L V_1^+ \sigma(t - t_2)$$

$$\text{där stegfunktionen } \sigma(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{för } t < \tau \\ 1 & \text{" } t > \tau \end{cases}$$

betecknas med $U(t - \tau)$ i boken

Första termen: Vågen V_1^+ har kommit fram till punkten z_1 vid tiden $t_1 = z_1/u$ och finns kvar i fortsättningen. (Spänningen är noll för tider $t < t_1$).

Andra termen: V_1^- har kommit fram till z_1 vid tiden t_2 . Vågen har då gått sträckan $\ell + (\ell - z_1)$, vilket tagit tiden $t_2 = (2\ell - z_1)/u = 2T - t_1$, där $T = \ell/u$.

1.2.4 Andra belastningar och insignaler. - Laplacetransformering

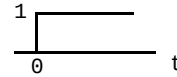
Om man har induktans och kapacitans i belastningen, får man införa Laplaceoperatorer $V_g(s)$, $V(z,s)$, $I(z,s)$, impedanser $Z_L(s)$ och reflexionskoefficienter $\Gamma(s)$. Beräkningen sker med operatoruttryck och resultatet översätts till tidsuttryck.

Vi betecknar motsvarigheten på detta sätt:

$$v(z,t) \supset V(z,s) \quad (\text{bågen i motsvarartecknet åt Laplacesidan})$$

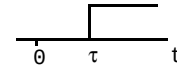
Några enkla Laplaceuttryck

enhetssteget $\sigma(t) \supset \frac{1}{s}$



ett fördröjt enhetssteg $\sigma(t-\tau) \supset \frac{1}{s} e^{-s\tau}$

$$e^{-\alpha t} \supset \frac{1}{s + \alpha}$$

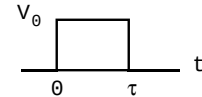


Uttryck av typen $\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$ partialbråksuppdelas till

$$\left(\frac{1}{s+\alpha} + \frac{-1}{s+\beta}\right) \frac{1}{\beta-\alpha}$$

Om insignalen är en **puls** enligt fig.

$v_g(t) = V_0[\sigma(t) - \sigma(t-\tau)]$ blir motsvarande



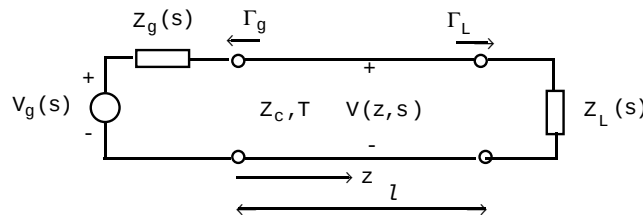
Laplaceuttryck $v_g(t) \supset V_g(s) = \frac{V_0}{s} e^{-s \cdot 0} - \frac{V_0}{s} e^{-s\tau}$

$V(s) = V_0$ (en konstant) $\Leftarrow V_0 \delta(t)$ $\uparrow$ t $\delta(t)=0$ för $t \neq 0$, $\delta(0)=\infty$

En sådan ström eller spänning är ofysikalisk! Kolla om du gjort räknefel!

1.2.5 Spänning och ström på ledningen

Vid $t=0$ kopplas en spänningskälla till en belastad ledning! Vi får ett operatorschema, där impedanserna Z_L och Z_g utgörs av resistanser, induktanser och kapacitanser.



Den allmänna lösningen till vågekvationen för spänningen på ledningen blir

$$\begin{cases} V(z,s) = V^+(0,s) e^{-\gamma z} + V^-(0,s) e^{\gamma z} & \text{och för strömmen} \\ I(z,s) = \frac{1}{Z_c} V^+(0,s) e^{-\gamma z} - \frac{1}{Z_c} V^-(0,s) e^{\gamma z} & (\text{OBS tecken för } I^-) \end{cases}$$

fram- och bakåtgående vågor

$$\gamma(s) = \sqrt{(R_l + sL_l)(G_l + sC_l)} \quad \text{och} \quad Z_c(s) = \sqrt{(R_l + sL_l)/(G_l + sC_l)}$$

För den förlustfria ledningen blir $e^{-\gamma z} = e^{-sz/u}$

Denna faktor motsvarar en tidsfördröjning av signalen (= den tid z/u det tar för signalen att utbreda sig sträckan z längs ledningen), när vi översätter operatuttrycket till tidsuttryck.

Enligt operatorkalkylens fördröjningssats motsvarar ju en tidsfördröjning τ av en funktion $f(t)$ en multiplikation med $e^{-s\tau}$ på Laplacesidan. $f(t-\tau) \sigma(t-\tau) \supset F(s)e^{-s\tau}$

Åter till kretsen i fig. ovan. Genom att utnyttja randvillkoren vid $z=0$ och $z=l$ får vi **spänningen**

$$V(z,s) = V_g(s) \frac{Z_c(s)}{Z_g(s) + Z_c(s)} \frac{e^{-\gamma z} + \Gamma_L(s) e^{-\gamma(2l-z)}}{1 - \Gamma_g(s) \Gamma_L(s) e^{-2\gamma l}}$$

och **strömmen**

$$I(z, s) = V_g(s) \frac{1}{Z_g(s) + Z_c(s)} \frac{e^{-\gamma z} - \Gamma_L(s) e^{-\gamma(2l-z)}}{1 - \Gamma_g(s) \Gamma_L(s) e^{-2\gamma l}}$$

$$\text{där } \Gamma_L(s) = \frac{Z_L(s) - Z_c}{Z_L(s) + Z_c} \quad \text{och} \quad \Gamma_g(s) = \frac{Z_g(s) - Z_c}{Z_g(s) + Z_c}$$

Det ser komplicerat ut och är det också!

För en **förlustfri** ledning har vi $\gamma(s) = s/u$ och $Z_c = \sqrt{L_\ell / C_\ell}$, båda rent reella. Uttrycken för $V(z, s)$ och $I(z, s)$ är oftast för komplicerade ändå för att man ska kunna hitta motsvarande tidsuttryck $v(z, t)$ och $i(z, t)$.

Vi måste serieutveckla $\frac{1}{1-k} = 1 + k + k^2 + k^3 + \dots$

$$V(z, s) = V_g(s) \frac{Z_c}{Z_g(s) + Z_c} \left[e^{-sz/u} + \Gamma_L e^{-2sT + sz/u} + \Gamma_g \Gamma_L e^{-2sT - sz/u} + \dots \right]$$

spänning in på ledningen
första framåt-
första bakåt-
andra framåtgående vågen
osv

$T = l/u$ löptid på ledningen

Genom utveckling av det allmänna uttrycket för $V(z, s)$ har vi fått fram ett antal spänningsvågor på ledningen. Vi fick samma resultat med rum-tid-diagrammet tidigare.

I stället för att serieutveckla kan man beräkna delvågorna direkt:

Vanlig spänningsdelning vid ingången på ledningen $V_0 = V_g(s)Z_c/(Z_g + Z_c)$. Sätt in utbredningsfaktorn $e^{-sz/u}$ för **första framåtgående våg** $\Rightarrow V_1^+(z, s) = V_0 e^{-sz/u}$

Första bakåtgående våg: Reflexion vid lasten. Γ_L gånger infallande vågs värde vid $z = \ell$. Utbredningsfaktor $e^{-s(\ell-z)/u} = \text{ny "framåtgående" våg med koordinaten } (\ell - z) \text{ räknat från lasten.}$

$V_1^-(z, s) = \Gamma_L V_1^+(z = \ell) e^{-s(\ell-z)/u} = \Gamma_L V_0 e^{-s\ell/u} e^{-s(\ell-z)/u} = \Gamma_L V_0 e^{-2sT + sz/u}$
som ovan.

Nästa delvåg, **andra framåtgående vågen**, efter reflexionen vid $z = 0$:

$$V_2^+(z, s) = \Gamma_g V_1^-(z = 0) e^{-sz/u} = \Gamma_g \Gamma_L V_0 e^{-2sT - sz/u} \quad \text{o.s.v.}$$

I rum-tid diagrammet ser man vilka vågor som finns vid en viss tidpunkt.

OBS 1! Strömvågen reflekteras med faktorn $-\Gamma$ varje gång.

OBS 2! Den reflekterade vågen uppkommer i samma ögonblick som den infallande vågen kommer fram.

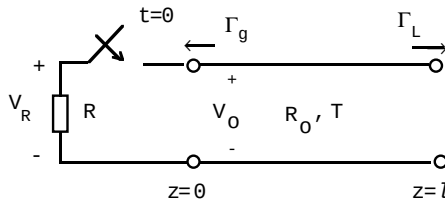
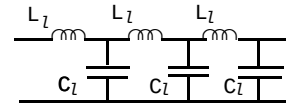
Vid lasten har vi t.ex. för $t = T$: $V_1^+(\ell, s) + V_1^-(\ell, s) = [1 + \Gamma_L(s)] V_1^+(\ell, s)$

Alla Laplaceuttryck för V och I ska sedan översättas till motsvarande tidsuttryck.

En **puls** med bredden τ på ingången kan man behandla som ett steg $1/s$ följt av ett lika stort negativt steg efter tiden τ ! Om pulslängden är större än löptiden T på ledningen, kan man få problem med överlappning. Då kan det vara bättre att Laplacetransformera hela pulsen.

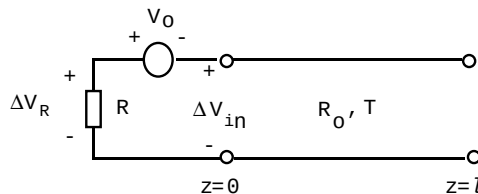
1.2.6 Ledningar med begynnelseenergi*

Begynnelseenergi innebär att vi har ström genom induktanserna och laddning på kondensatorerna längs ledningen när vi börjar. Vi behandlar bara fallet med begynnelseladdning och förlustfria ledningar.



Ledningen är uppladdad till spänningen V_0 . Vid $t=0$ slutes brytaren. Beräkna V_R

Vi kan använda slutningssatsen för att beräkna **ändringar** i strömmar och spänningar. Satsen säger att vi ska koppla in en spänningskälla med storlek = den spänningen som skulle ha funnits över brytaren, om ingen slutning skett, d.v.s. V_0 . Polariteten ska vara sådan att källan ska skicka ström åt samma håll genom brytaren som V_0 skulle göra. Alltså enligt slutningssatsen:



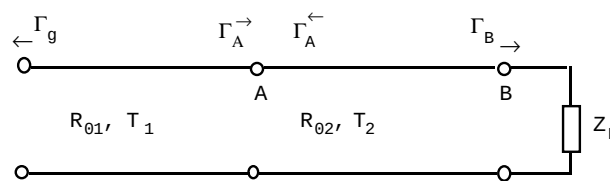
Ledning **utan** begynnelseenergi
Denna figur ger **ändringarna**

Totalt får vi spänningen över resistansen R $V_R(t) = V_R(t < 0) + \Delta V_R(t)$. $\Delta V_R(t)$ beräknar vi ur figuren ovan med hjälp av ledningsteori.

[Cheng: Field and wave electromagnetics har ett avsnitt 9-5.3 om ledningar med begynnelseenergi. Där finns också ett problem, P9-38, till detta avsnitt.]

1.2.7 Flera ledningar*

Antag att vi har två seriekopplade förlustfria ledningar med olika karakteristisk impedans R_0 och löptid T , se fig.!



Vågen V_1^+ som kommer in till punkt A reflekteras där med en faktor $\Gamma_A^+ = \frac{R_{02} - R_{01}}{R_{02} + R_{01}}$

$-R_{02}$ utgör belastning i punkten A. –

$\Gamma_A^+ V_1^+$ blir en bakåtgående våg på ledning 1.

Den **totala** vågen i A blir nu $V_1^+ + V_1^- = (1 + \Gamma_A^+) V_1^+$.

$(1 + \Gamma_A^+) V_1^+$ går vidare **in på ledning 2**. Vid lasten reflekteras den med faktorn

$$\Gamma_B = \frac{Z_L - R_{02}}{Z_L + R_{02}}.$$

Bakåtgående våg på ledning 2 blir nu $\Gamma_B (1 + \Gamma_A^+) V_1^+$

I **punkten A** sker sedan en reflexion med faktorn Γ_A^- . Belastningen i A blir nu R_{01} och

$$\Gamma_A^- = \frac{R_{01} - R_{02}}{R_{01} + R_{02}}.$$

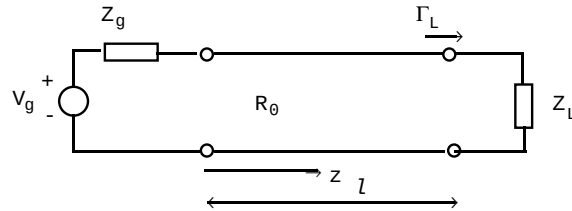
$\Gamma_A^- \Gamma_B (1 + \Gamma_A^+) V_1^+$ blir **ny framåtgående våg på ledning 2**.

In på **ledning 1** får vi en **bakåtgående** våg $(1 + \Gamma_A^-) \Gamma_B (1 + \Gamma_A^+) V_1^+$

Man får rita ett rum-tid-diagram för vardera ledningen för att kunna hålla reda på spänningskomponenterna och de tider de blir fördröjda på resp. ledning.

1.3 Stationär sinus - Smithdiagram

Ett alternativ till att använda $j\omega$ -metoden och räkna analytiskt är en grafisk metod, det s.k. Smithdiagrammet. Man ritat reflexionskoefficienten Γ i det komplexa planet, Γ_r efter realaxeln och Γ_i efter imaginäraxeln. Eller i polära koordinater beloppet av Γ – blir en cirkel i diagrammet för förlustfria ledningar – och fasvinkeln för Γ .



1.3.1 Impedansdiagram - Härledningar

För en förlustfri ledning är karakteristiska impedansen $Z_c = R_0$, rent reell. Den komplexa reflexionskoefficienten för spänning vid lasten Γ_L kan skrivas

$$\Gamma_L = |\Gamma_L| e^{j\theta_{\Gamma}} = \Gamma_r + j\Gamma_i = \frac{Z_L - R_0}{Z_L + R_0} = \frac{Z_L/R_0 - 1}{Z_L/R_0 + 1} \quad (1)$$

Γ_L har skrivits både som belopp och fasvinkel och som real- och imaginärdel i ekv.(1). Lastimpedansen Z_L har **normerats** med avseende på R_0 . Z_L delas också upp i real- och imaginärdel:

$$z_L = Z_L/R_0 = R_L/R_0 + jX_L/R_0 = r_L + jx_L$$

I en **godtycklig punkt** z på ledningen har vi reflexionsförhållandet uttryckt med hjälp av Γ_L :

$$\Gamma(z) = \frac{\tilde{V}^-(z)}{\tilde{V}^+(z)} = \Gamma_L e^{2\gamma(z-l)}$$

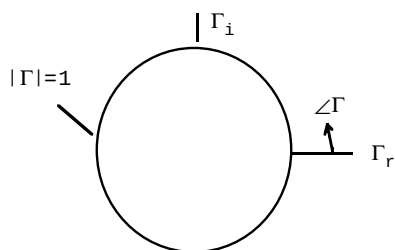
För en förlustfri ledning är $|\Gamma(z)| = |\Gamma_L| = \text{konst} \leq 1$. Det är således **bara punkter på och innanför $|\Gamma| = 1$ -cirkeln**, som är **intressanta** i det komplexa Γ -planet!

Vi kan räkna mer generellt, inte bara vid lasten. Vi slopar därför index L i r_L och x_L !

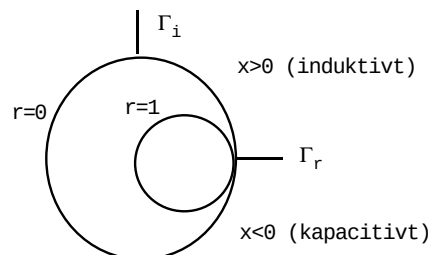
Uttryck nu r och x som funktion av Γ_r och Γ_i och rita in i det komplexa Γ -planet!

$r = \text{konstant}$ och $x = \text{konstant}$ visar sig bli cirklar i det komplexa Γ -planet.

Alla **r-cirklar ligger inom $|\Gamma| = 1$ -cirkeln**. $r=0$ -cirkeln har radien 1, d.v.s. är identisk med $|\Gamma| = 1$ -cirkeln. se fig. t.h. nedan! **Alla r-cirklar går genom punkten $\Gamma = (1,0)$, likaså alla x-cirklar.**



Komplexa Γ -planet
Diagram med rektangulära
och polära koordinater



Komplexa Γ -planet med
cirkelarna $r=0$ och $r=1$ inritade

Bara delar av **x-cirklarna** finns inom $|\Gamma| = 1$ -cirkeln. Alla x-cirklar går genom punkten $\Gamma = (1,0)$. Realaxeln representerar $x=0$ -cirkeln. I övre halvplanet är $x > 0$ d.v.s. induktiv impedans, i det undre är $x < 0$, kapacitiv impedans.

x-cirklarna är inte utritade i fig. ovan av rittekniska skäl. Längst bak i detta häfte och i Cheng finns fullständiga Smithdiagram.

Att läsa av impedanser i Smithdiagrammet

Skärningen mellan en r-cirkel och en x-cirkel representerar en viss normaliserad last. En **förflyttning** efter ledningen i riktning **mot generatoren motsvarar** en **förflyttning medurs längs med cirkeln med radien $|\Gamma_L|$ och medelpunkten i origo i Γ -planet**, därför att

$$\Gamma(z) = |\Gamma_L| e^{j\angle\Gamma_L + j2\beta(z-l)}$$

Eftersom z avtar, när vi rör oss mot generatoren, kommer fasvinkeln i det komplexa planet att minska. Vi rör oss således **medurs mot generatoren** i Smithdiagrammet.

En förflyttning på $\lambda/2$, d.v.s. $\ell - z = \lambda/2$ medför att exponenten blir $j2\beta(-\lambda/2 = -j2\pi$. Således

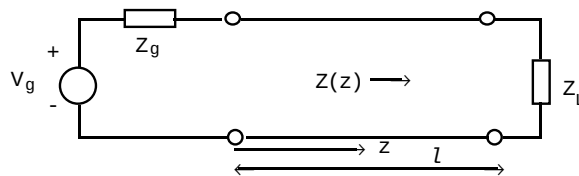
$\lambda/2$ på ledningen motsvarar ett varv i Smithdiagrammet!

Omkretsen i diagrammet är därför graderad både i grader och våglängder.

I en **godtycklig punkt z** på ledningen kan vi i analogi med ekv.(1) ovan skriva

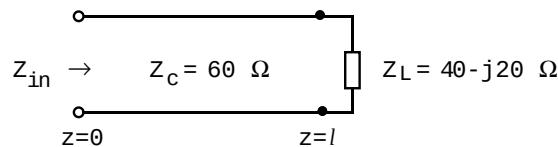
$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - R_0}{Z(z) + R_0} = \frac{Z(z) - 1}{Z(z) + 1} \quad (2)$$

där $Z(z)$ = inimpedansen på ledningen sedd vid koordinaten z , se fig. nedan! Vi kan läsa av den normerade inimpedansen direkt i Smithdiagrammet!



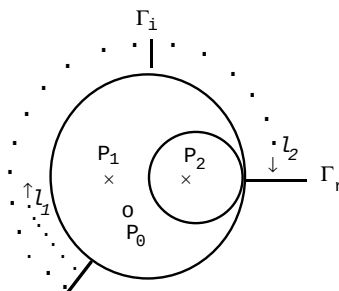
Exempel: Vi löser exempel 1–8 i Exempelsamlingen med Smithdiagram!

En förlustfri kabel med luft som dielektrikum har karakteristiska impedansen 60Ω . Kabeln är belastad med impedansen $(40 - j20) \Omega$. Frekvensen är 100 MHz . Hur lång ska kabeln vara för att inimpedansen på kabeln ska bli rent reell? Vilket värde får denna reella inimpedans?



Lösning: Normera Z_L : $z_L = (40 - j20)/60 = 0,667 - j 0,333 = r - jx$

Gå in i Smithdiagrammet, där cirkeln $r=0,667$ skär cirkeln $x=-0,333$ ($x < 0$ i undre halvplanet). Blir punkten P_0 , se skiss av diagrammet!



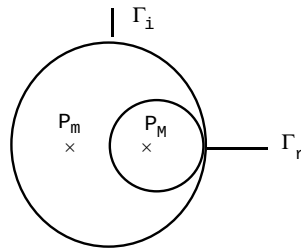
Gå från P_0 radiellt ut till periferin. Markera utgångsläget på våglängdskalan där! Gå sedan medurs mot generatoren på cirkeln $|\Gamma_L|$ från P_0 till realaxeln! – På realaxeln i diagrammet är $x=0$ och Z_{in} rent reell. – Man får två möjligheter. Att gå till punkten P_1 på negativa realaxeln eller till punkten P_2 på positiva realaxeln.

I P_1 läser vi av $r = 0,57$ och $x=0$. På våglängdsskalan läser vi $\ell_1 \simeq 0,079\lambda$. I punkten P_2 blir $r = 1,75$ och $\ell_2 \simeq 0,329\lambda$. Våglängden blir här 3 m så vårt resultat blir

$Z_{in1} = 60 \cdot 0,57 = 34 \Omega$ för $\ell_1 = 0,24 \text{ m}$ resp. $Z_{in2} = 60 \cdot 1,75 = 105 \Omega$ för $\ell_2 = 0,99 \text{ m}$.

1.3.2 Ståendevågförhållande

Vi har tidigare beräknat $V_{\max}$ och $V_{\min}$ på ledningen. I en maxpunkt är $\Gamma = +|\Gamma|$, d.v.s. en punkt på positiva realaxeln. I en minpunkt är $\Gamma = -|\Gamma|$. Se beräkning på s. 3!
I Smithdiagrammet har vi maxpunkten P_M , där cirkeln med radien $|\Gamma_L|$ skär positiva realaxeln och minpunkten P_m , där cirkeln skär negativa realaxeln, se fig. nedan!



Att bestämma s i diagrammet:

I maxpunkten gäller $z(P_M) = r$. ($x=0$ på realaxeln) Sätt in detta i ekv. (2) på s. 11:

$$\text{Vi får } \Gamma(P_M) = (r-1)/(r+1) \quad (3)$$

Ståendevågförhållandet

$$s = \frac{|\tilde{V}|_{\max}}{|\tilde{V}|_{\min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \quad \text{eller omvänt} \quad |\Gamma| = \frac{s-1}{s+1} \quad (4)$$

I maxpunkten gäller att $\Gamma = |\Gamma|$. Vi kan därför skriva ekv. (4) som $\Gamma(P_M) = (s-1)/(s+1)$ (5)

Jämför nu ekv. (5) och (3)! Slutsats:

Vi kan läsa av ståendevågförhållandet s genom att läsa på r -skalan i maxpunkten P_M i Smithdiagrammet!

Bra lösta ex i Cheng (Engineering electromagnetics): Ex 8-7, 8-8

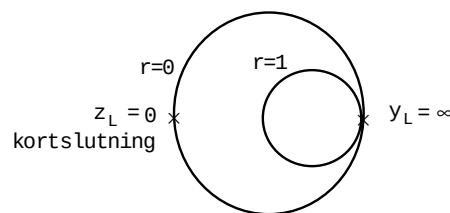
1.3.3 Admittansdiagram

En $\lambda/4$ lång förlustfri ledning fungerar som impedans-transformator. $Z_{in, \lambda/4} = R_0^2/Z_L$ eller normerat $z_{in, \lambda/4} = 1/z_L = y_L$.

$\lambda/4$ motsvarar ett halvt varv i Smithdiagrammet. Vi kan således läsa av den **normerade admittansen** genom att flytta till den diametralt motsatta punkten på $|\Gamma|$ -cirkeln!

Den normerade admittansen skrivs $y_L = Y_L/R_0 = g + jb$. Tecken på b står utskrivet i Smithdiagrammet. ($b > 0$ i övre halvplanet)!

Exempel: För $z_L = 0$, d.v.s. en kortslutning ($r=0$, $x=0$), läser man av diametralt motsatt $y_L = \infty$, se fig. nedan!



Bra lösta ex i Cheng: Ex 8-8, 8-10.

1.3.4 Anpassning

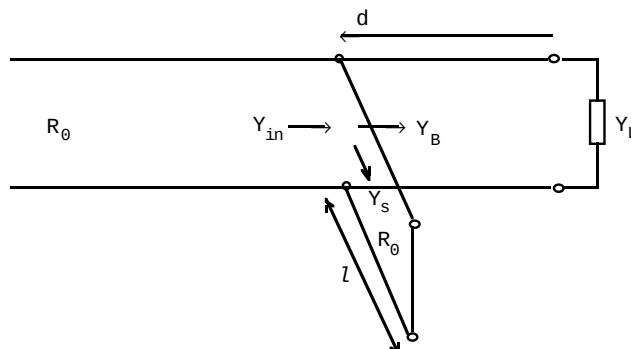
Man vill normalt ha $s=1$ på ledningar, d.v.s. ingen reflekterad våg. Detta uppfylls för förlustfri ledning om $Z_0 = R_0$.

Anpassning kan t.ex. ske genom inkoppling av en extra ledning på lämpligt avstånd d från lasten. Den extra ledningen är normalt kortsluten i sin belastningsända. En kortsluten ledning har en rent imaginär inimpedans $z_{in} = jx = j\tan\beta\ell$, där x är positiv eller negativ beroende på ledningslängden ℓ .

a/ Parallell-kopplad ledning:

Räkna med admittanser i Smithdiagrammet!

Vi vill anpassa en ledning med karakteristiska impedansen R_0 avslutad med admittansen y_L med en parallellkopplad ledning på avståndet d från y_L . Den extra ledningen har samma karakteristisk impedans R_0 och längden ℓ , se fig.! Bestäm d och ℓ !



För anpassning vill vi ha $Y_{in} = 1/R_0$. Ur figuren fås inadmittansen på ledningen alldeles före inkopplingspunkten $Y_{in} = Y_B + Y_s = 1/R_0$. Y_B = inadmittansen på resten av ledningen alldeles efter inkopplingspunkten. Y_s = inadmittansen på den parallellkopplade kortslutna ledningen. Normerat får vi $y_{in} = y_B + y_s = 1$.

1/ **Välj d** , så att $y_B = 1 + jb$, med b positiv eller negativ, d.v.s **två fall**. Läs av längden d uttryckt i våglängder på periferiskalan i diagrammet för vardera fallet (d_1 resp. d_2)!

2/ Välj därefter den kortslutna ledningens inadmittans $y_s = -jb$. Gå in i Smithdiagrammet på kortsluten last och avläs **längden** ℓ uttryckt i våglängder, så att $y_s = -jb$. Till värdet d_1 får man längden ℓ_1 , till d_2 längden ℓ_2 .

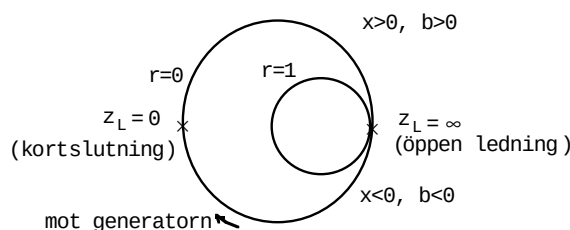
Bra löst exempel: Ex 8-11 i Cheng.

b/ Seriekopplad ledning:

Räkna med impedanser i Smithdiagrammet!

Anpassa genom att koppla in en kortsluten ledning **i serie** med den ledning man vill anpassa. Beräkning sker som för parallellkopplad ledning, men nu läser man impedanser i stället i Smithdiagrammet.

1.3.5 Smithdiagrammet - sammanfattning: Förlustfri ledning



Normera: Impedans $z = Z/R_0 = r + jx$; admittans $y = Y/(1/R_0) = g + jb$.

Räkna konsekvent med impedanser (admittanser) i diagrammet! Gå till den diametralt motsatta punkten på $|\Gamma|$ -cirkeln, om du behöver byta till admittans (resistans).

Förflyttning **medurs** på cirkel, radie = $|\Gamma L|$ och medelpunkt i origo, motsvarar förflyttning på ledningen **mot generatorn**.

Ett varv i diagrammet = $\lambda/2$ på ledningen.

Kapitel 2

Vågledare

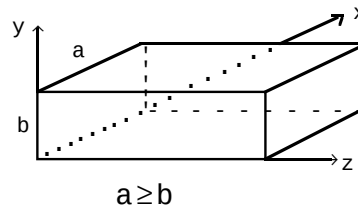
Vid högre frekvenser ($\approx 10^9$ Hz) blir förlusterna på transmissionsledningar alltför stora. Man använder i stället rör av gott ledande material. Vågutbredning sker i luften (eller i dielektrikum) i röret. Vanligast är rektangulärt tvärsnitt på vågledaren.

Ideal vågledare: $\sigma = \infty$ och $E = 0$, $H = 0$ i metallväggarna.

2.1 Vågledare med rektangulärt tvärsnitt

2.1.1 Ideal rektangulär vågledare

Utbredning sker i z-led i vågledaren. Lösningarna innehåller faktorn $e^{-j\beta_g z}$ där β_g är utbredningskonstanten för vågledaren (index g=guide - vågledare)



Vi får vågutbredning, om β_g är reell.

$$\beta_{gmn}^2 = (\omega/c)^2 - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2 = (\omega/c)^2 - h_{mn}^2$$

β_g blir reell för

$$\omega > \omega_{\text{cutoff } mn} = c \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} = c h_{mn}$$

$f_{\text{cutoff } mn} = \text{gränshfrekvens}$

$m, n = 0, 1, 2, \dots$

c = ljushastigheten i materialet i vågledaren

a. TE-vågor – transversellt E-fält, $E \perp z$ –

Lösningarna blir av formen $\bar{E}_x \sim \cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) e^{-j\beta_g z}$

$$\bar{E}_y \sim \sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) e^{-j\beta_g z}$$

TE_{mn} olika m och n ger olika **moder**. TE_{10} är vanligast.

OBS! Beteckningen TE_{mn} : **första** index hör ihop med den **största** sidan i vågledaren (a). m eller n kan vara 0 för TE-moder.

Dominerande mod: mod med den lägsta gränshfrekvensen

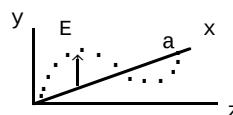
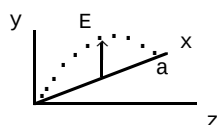
Exempel på moder:

TE_{10} moden ($m=1, n=0$)

$$\bar{E}_x = 0 \quad \bar{E}_y \sim \sin(\pi x/a)$$

TE_{20} moden ($m=2, n=0$)

$$\bar{E}_x = 0 \quad \bar{E}_y \sim \sin(2\pi x/a)$$



Randvillkor vid $x=0$ och $x=a$: $E_t = 0$ (metallväggar)

$m + 1$ är antalet nollställen för E_y -fältet i x-led.

I **Formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori** finns uttryck för fälten $\vec{H}_z^0$ för TE-vågor och $\vec{E}_z^0$ för TM-vågor. Övriga komponenter av fälten får man genom insättning i formlerna strax ovanför i formelsamlingen.

Ansats för TE-moden: $\vec{H}_z^0 = C \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$ (se Formelsamlingen)

Övre index står för $z=0$, d.v.s. utan z -beroendet $e^{-j\beta z}$.

TE_{mn}-moder: m eller n kan vara noll.

b. TM-vågor ($H \perp z$)

Ansats för TM-moden: $\vec{E}_z^0 = C' \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ (se Formelsamlingen)

T_{mn}-moder: varken m eller n får vara 0. Alla fält = 0 då

Fas- och gruppshastighet för vågledare

$$v_{\text{fas}mn} = \omega / \beta_{\text{gmn}}$$

$$v_{\text{grupp}mn} = d\omega / d\beta_{\text{gmn}}$$

$$v_{\text{fas}mn} \cdot v_{\text{grupp}mn} = c^2$$

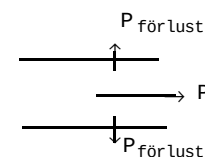
gäller speciellt för
vågledare, c =ljus-
hastigheten

2.1.2 Små förluster i vågledare / transmissionslinje

I praktiken har man inte förlustfri överföring, utan vågorna dämpas. Av vågledaren överförd effekt i z -led varierar som

$$P(z) = P_0 e^{-2\alpha z} \quad \text{där dämpningen } \alpha \text{ fås av}$$

$$\alpha = \frac{P_{\text{förlust}} / \text{längdenhet i } z\text{-led}}{2P_0}$$



där $P_{\text{förlust}}$ = värmeförluster i vågledarväggarna eller transmissionslinjen.
 P_0 = överförd effekt – räknad i det förlustfria fallet.

- 1/ Beräkna $\vec{E}$ och $\vec{H}$ i det förlustfria fallet (Formelsamlingens
liksom överförd effekt P_0 . formel)
- 2/ Använd RV vid vågledarväggarna $\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$ för att få
ytströmtätheten $\vec{J}_s$ i väggen.

Effekt per ytenhet $\frac{1}{2} R_s |\vec{J}_s|^2$ ska sedan integreras över resp.

vågledarväggs yta (fyra väggar) för $P_{\text{förlust}}$. Vi har inget
 z -beroende i $P_{\text{förlust}}$. Räkna per längdenhet i z -led.

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \text{ytresistansen.}$$

2.1.3 Allmänt om gruppshastighet

Fas hastigheten $v_{\text{fas}} = \omega / \beta$ är oberoende av ω för plana vågor i förlustfria material, ty
 $\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$.

I material med förluster, för transmissionsledningar och vågledare blir v_{fas} fre-
kvensberoende och överförda signaler distordas. Se Cheng 7.4!

[För en transmissionslinje med små förluster blir dock $v_{\text{fas}} \simeq \text{konst.}$]

Normalt består överförd information av ett litet frekvensområde, ”vågpaket”, nära en bär-våg av hög frekvens. Paketet överförs med **grupphastighet**

$$v_{\text{grupp}} = \frac{1}{d\beta/d\omega} ; \quad v_{\text{fas}} = \omega/\beta$$

v_{grupp} kan vara mindre än eller större än v_{fas} .

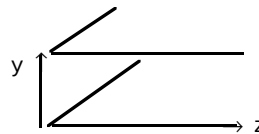
Speciellt för vågledare gäller

$$v_{\text{grupp}} v_{\text{fas}} = c^2$$

Se också beräkningen av **energitransporthastighet** = v_{grupp} i uppgift 2-7 i exempelsamlingen! Det finns **lösning** till 2-7 i häftet **Ledningar och lösningar**!

2.1.4 Utbredning mellan parallella plan

Använd formelsamlingens formler för rektangulär vågledare med ansats utan variation i x-led!

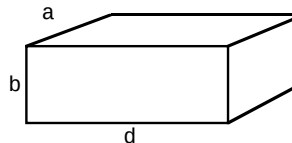


2.1.5 Rektangulär hålrumsresonator

Genom att sätta metallväggar vid $z=0$ och vid $z=d$ i en rektangulär vågledare får man en rektangulär hålrumsresonator. Randvillkoren i z-led leder till stående vågor av typen $\cos\beta z$ eller $\sin\beta z$ i z-led. Resonatorn ersätter den vanliga LC-resonanskretsen t.ex. i filter vid höga frekvenser. Hålrumsresonatoren har högt Q-värde, vilket ger en liten bandbredd.

Resonansvinkelfrekvens

$$\omega_{\text{mnp}} = c \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 + (p\pi/d)^2}$$



TE_{mnp}-mod: m eller n får vara 0, men $p \neq 0$
 TM_{mnp}-mod: $m \neq 0$ och $n \neq 0$, men p får vara 0.

I uppgift 2-6 i Exempelsamlingen beskrivs hur man gör en resonator av en ideal vågledare. Beteckningen på moden, t.ex. TE_{mnp}, beror vilken sida a, b eller d man betraktar som ”utbredningsriktning”.

Fälten i hålrumsresonatoren måste beräknas med Maxwellkvationerna. Formelsamlingens fält för vågledare går bara att använda tillsammans med rätta randvillkor, om man räknar som i 2-6 i exempelsamlingen t.ex.

På sidan 14 i **Formelsamlingen** finns beskrivet hur man får **fälten i hålrumsresonatoren**!

2.1.6 Beteckningar för olika typer av vågor

Vågutbredningsfaktorn $e^{-\gamma z}$ och $\gamma = \alpha + j\beta$ förekommer i våra vågor, likaså impedansen Z . Observera att vi har **olika** γ och Z **för de olika typerna av vågor**.

1/ Plana vågor: $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$
 och vågimpedansen $Z = \frac{\bar{E}_x}{H_y} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$

2/ Vågor på ledning: $\gamma_{\text{ledning}} = \sqrt{(R_l + j\omega L_l)(G_l + j\omega C_l)}$
 karakteristisk impedans $Z_c = \sqrt{\frac{R_l + j\omega L_l}{G_l + j\omega C_l}} = \frac{\bar{V}^+}{\bar{I}^+}$

3/ Förlustfri **rektangulär vågledare**

$$\beta_g = \sqrt{(\omega/c)^2 - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2}$$

Man kan också införa en speciell vågimpedans för vågledare, Z_{TE} resp. Z_{TM} . Vi använder oftast Formelsamlingens formler för E och H i stället.

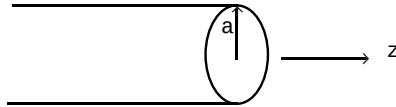
4/ Vi får också **olika uttryck** på γ_g , α_g och β_g **för de olika vågledartyperna**: rektangulär enligt 3/ ovan. Uttryck för **cylindriska resp. dielektriska vågledare** behandlas i följande avsnitt!

Med **beteckningen** β_0 **och** Z_0 avses $\beta_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ och $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, d.v.s. de uttryck man har för plana vågor i fri rymd.

2.2 Vågledare med cirkulärt tvärsnitt

2.2.1 Cirkulära vågledare

Vågutbredning sker inne i dielektrikum (luft) i ett cylindriskt metallrör med innerradien a . Vi räknar med ideal metall ($E=0$ i metallen).

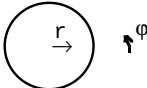


Vågutbredning i z -led: utbredningsfaktor $e^{-\gamma z}$ eller för förlustfri utbredning $e^{-j\beta z}$. Vi borde egentligen skriva $-\gamma_g z$ resp. $-j\beta_g z$ i exponenten. För enkelhets skull slopas index $g = \text{guide}$. Vi vet att det blir **olika utbredningskonstanter** för plana vågor, ledningar och vågledare!

Lösningarna för vågledaren med cirkulärt tvärsnitt blir något mer komplicerade än vid rektangulärt tvärsnitt. Man får Besselfunktioner för variation i r -led och cosinus (eller sinus) för variation i φ -led i tvärsnittet. Utbredningen delas upp i två fall: TM och TE som för rektangulära vågledare.

a. TM-moder

TM-moder har enbart E_z -fältet i z -led:

$$\tilde{E}_z(r, \varphi, z) = \tilde{E}_z^0(r, \varphi) e^{-j\beta z}$$


Ansats för TM-moder: $\tilde{E}_z^0(r, \varphi) = C_n J_n(hr) \cos n\varphi$

C_n är en konstant med dimensionen V/m, J_n **Besselfunktioner av första slaget och ordningen n** , där n är ett heltal. Övriga fältkomponenter blir

$$\begin{cases} \tilde{E}_r^0(r, \varphi) = -\frac{j\beta}{h} C_n J_n'(hr) \cos n\varphi \\ \tilde{E}_\varphi^0(r, \varphi) = \frac{j\beta n}{h^2 r} C_n J_n(hr) \sin n\varphi \\ \tilde{H}_r^0(r, \varphi) = -\frac{j\omega\epsilon n}{h^2 r} C_n J_n(hr) \sin n\varphi \\ \tilde{H}_\varphi^0(r, \varphi) = -\frac{j\omega\epsilon}{h} C_n J_n'(hr) \cos n\varphi \\ \tilde{H}_z^0 = 0 \end{cases}$$

där $\beta^2 = (\omega/c)^2 - h^2$. Värdet på h bestäms av randvillkor vid $r=a$: E_t och H_n måste vara noll vid ideal metall. Här: $E_z = 0$ (också E_φ och H_r) vid $r=a$, d.v.s. $J_n(ha) = 0$ ger h_{TM}

Nollställen för Besselfunktioner

I Beta finns nollställen för J_n och derivatan J_n' . Vi betecknar nollställena till J_n med x_{np} och nollställena till J_n' med x'_{np} , där $p = 1, 2, 3$ osv.

$x_{01} = 2,40$; $x_{02} = 5,52$; $x_{11} = 3,83$ t.ex. Nollstället $x=0$ är inte intressant som lösning.

För TM-vågor får vi således $h_{TM_{01}} a = x_{01} = 2,40$; $h_{TM_{02}} a = x_{02} = 5,52$; $h_{TM_{11}} a = x_{11} = 3,83$.

TM_{np}-modernas index

Första **index n** betecknar antal helperioder i φ -led; **index p** betecknar antal halvperioder i r -led.

Kan också uttryckas som $n = (\text{antal nollställen} - 1)$ i φ -led och $p = (\text{antal nollställen} - 1)$ i r -led. Undantag för $n=0$.

Gränsvinkelfrekvenser

β måste vara reell, d.v.s. $\beta^2 > 0$ för vågutbredning. Gränsvinkelfrekvensen ω_c bestäms ur $\beta^2 = (\omega_c/c)^2 - h^2 = 0 \Rightarrow \omega_c = hc$ och $f_c = hc/2\pi = h/2\pi\sqrt{\mu\epsilon}$.

Lägsta gränsvinkelfrekvensen för TM-vågor har TM₀₁-moden:

$$\omega_{c\text{ TM}_{01}} = h_{\text{TM}_{01}} c = x_{01} c/a = 2,40 c/a$$

b. TE-moder:

TE-moderna har enbart H_z -fältet i z-led.

$$\tilde{H}_z(r, \varphi, z) = \tilde{H}_z^0(r, \varphi) e^{-j\beta z}$$

Ansats för TE-moder: $\tilde{H}_z^0(r, \varphi) = C_n' J_n(hr) \cos n\varphi$

C_n' är en konstant med dimensionen A/m, J_n **Besselfunktioner** av första slaget och **ordningen n**, där n är ett heltal. Övriga fältkomponenter blir

$$\begin{cases} \tilde{H}_r^0(r, \varphi) = -\frac{j\beta}{h} C_n' J_n'(hr) \cos n\varphi \\ \tilde{H}_\varphi^0(r, \varphi) = \frac{j\beta n}{h^2 r} C_n' J_n(hr) \sin n\varphi \\ \tilde{E}_r^0(r, \varphi) = \frac{j\omega\mu n}{h^2 r} C_n' J_n(hr) \sin n\varphi \\ \tilde{E}_\varphi^0(r, \varphi) = \frac{j\omega\mu}{h} C_n' J_n'(hr) \cos n\varphi \\ \tilde{E}_z^0 = 0 \end{cases}$$

där $\beta^2 = (\omega/c)^2 - h^2$

Värdet på h bestäms av randvillkor vid $r=a$: E_t och H_n måste vara noll vid ideal metall.

Här är $E_\varphi = 0$ (och H_r) vid $r=a$, d.v.s.

$$J_n'(ha) = 0 \text{ ger } h_{\text{TE}}$$

Några **nollställen till $J_n'(ha)$** : $x'_{01} = 3,83$; $x'_{11} = 1,84$; $x'_{21} = 3,05$.

Den **lägsta gränsvinkelfrekvensen** för TE-vågor har TE₁₁-moden:

$$\omega_{c\text{ TE}_{11}} = h_{\text{TE}_{11}} c = x'_{11} c/a$$

Denna gränsvinkelfrekvens är lägre än TM₀₁-modens gränsvinkelfrekvens. **TE₁₁-moden är således dominerande mod!**

TE_{np}-modernas index

Första **index n** betecknar antal helperioder i φ -led; **index p** betecknar antal halvperioder i **r-led**.

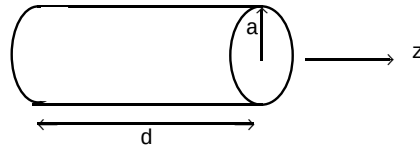
Kan också uttryckas som $n = (\text{antal nollställen} - 1)$ i φ -led och $p = (\text{antal nollställen})$ i r-led. Undantag för $n=0$.

Sammanfattningsvis:

$$ha = \text{nollställen till } J_n \text{ för TM-moder resp. } J_n' \text{ för TE-moder}$$

2.2.2 Cirkulär hålrumresonator

Genom att sätta metallväggar på avståndet d i z -led i den cylindriska vågledaren, får man en hålrumresonator. Det blir stående vågor av typen $\sin\beta z$ eller $\cos\beta z$ i z -led p.g.a. randvillkoren vid $z=0$ och $z=d$.



Resonansvinkelfrekvenser

TM_{npq}-moder:

$$\omega_{\text{res TM}_{npq}} = c \sqrt{\left(\frac{x_{np}}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d}\right)^2} \quad \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots \\ p = 1, 2, 3, \dots \\ q = 0, 1, 2, \dots \end{array}$$

TE_{npq}-moder:

$$\omega_{\text{res TE}_{npq}} = c \sqrt{\left(\frac{x_{np}'}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d}\right)^2} \quad \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots \\ p = 1, 2, 3, \dots \\ q = 1, 2, 3, \dots \end{array}$$

TM₀₁₀ har den lägsta resonansfrekvensen för TM-moder. TE₁₁₁ har den lägsta resonansfrekvensen för TE-moder.

Vilken av dem som blir dominerande mod beror på förhållandet d/a .

2.3 Dielektriska vågledare

I en dielektrisk vågledare sker vågutbredningen dels i ett dielektriskt material och dels som en ytvåg i luften utanför vågledaren. Vi studerar utbredning i z -led i en **tunn dielektrisk skiva**, som är oändligt utsträckt i x -led.



Vågutbredningsfaktorn $e^{-\gamma z}$ blir $e^{-j\beta z}$ för **förlustfritt dielektrikum**. Index g i γ_g och β_g har slopats. Faktorn $e^{-j\beta z}$ ingår i alla fält, både i dielektrikum och i luften utanför vågledaren!

2.3.1 TM-vågor

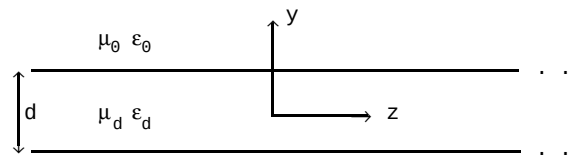
1. Inledning

TM-vågorna har bara E_z -komponent

$$\tilde{E}_z(y) = \tilde{E}_z^0(y) e^{-j\beta z}$$

Differentialekvationen för E_z^0 blir

$$\frac{d^2 \tilde{E}_z^0(y)}{dy^2} + h^2 \tilde{E}_z^0(y) = 0 \quad \text{med } h^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2$$



Ansats för E_z^0 i dielektrikum:

$$\bar{E}_z^0(y) = E_o \sin k_y y + E_e \cos k_y y \quad |y| < d/2$$

och för fälten i luften utanför skivan:

$$\bar{E}_z^0(y) = C_u e^{-\alpha(y-d/2)} \quad y > d/2$$

$$\bar{E}_z^0(y) = C_l e^{\alpha(y+d/2)} \quad y < -d/2$$

k_y är utbredningskonstant i y-led och α ger dämpning i y-led av vågorna i luften utanför den dielektriska skivan. Index u, l i amplituderna C_u resp. C_l , står för upper resp. lower.

2. Dispersionsrelationer

Samband mellan utbredningskonstanterna

$$k_y^2 = \omega^2 \mu_d \epsilon_d - \beta^2 = h_d^2 \quad (1) \quad \text{index d står för dielektrikum}$$

$$\alpha^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = -h_0^2 \quad (2) \quad \text{index 0 står för luft}$$

Uttrycken (1) och (2) kallas **dispersionsrelationer**, därför att β inte är linjärt beroende av ω . Olika frekvenser utbreder sig med olika fashastighet, s.k. dispersion.

För plana vågor i förlustfria material har vi linjärt beroende: $\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$. Ingen dispersion då.

Ekvation (1) och (2) adderade blir

$$\alpha^2 + k_y^2 = \omega^2 (\mu_d \epsilon_d - \mu_0 \epsilon_0) \quad (3)$$

3. Ytvågor

Vågorna utanför skivan kallas **ytvågor**. De utbreder sig i z-led och dämpas (snabbt) i y-led. Det är inga plana vågor. Vi har räknat på sådana vågor i kursen Elektromagnetiska fält. Se t.ex. uppgift 12-3 och 12-17 i Exempelsamlingen! En ytvåg transporterar effekt i z-led, men ej i y-led! Vågen kallas ytvåg, eftersom den är bunden till ytan på den dielektriska skivan. Mer om detta senare i ett Löst Exempel.

4. Fält och karakteristiska relationer för TM-moder

Man delar upp TM-moderna i två fall **udda** och **jämna**. E_{0z} innehåller $\sin k_y y$ resp. $\cos k_y y$, som är udda resp. jämn funktion.

4a. Udda TM-moder

Fälten i den dielektriska skivan blir – index o = odd i E_o

$$\begin{cases} \bar{E}_z^0(y) = E_o \sin k_y y \\ \bar{E}_y^0(y) = -\frac{j\beta}{k_y} E_o \cos k_y y \\ \bar{H}_x^0(y) = \frac{j\omega\epsilon_d}{k_y} E_o \cos k_y y \end{cases} \quad |y| < d/2$$

Randvillkor på E_z^0 vid $z=\pm d/2$ ger amplituderna C_u och C_l på fälten i luften utanför skivan. Randvillkor på H_x^0 vid $z=d/2$ ger detta samband:

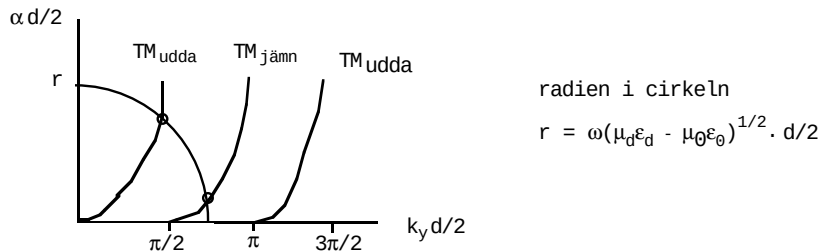
$$\boxed{\alpha = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_d} k_y \tan \frac{k_y d}{2}} \quad \text{udda TM-moder} \quad (4)$$

Grafisk bestämning av α och k_y för udda (och jämna) TM-moder

Ekvation (3) och (4) ger oss värden på α och k_y för en viss vinkelfrekvens. Man kan lösa ekvationerna grafiskt.

Multiplitera ekv. (3) med $(d/2)^2$! I ett diagram med $(\alpha d/2)$ som funktion av $(k_y d/2)$ representerar då ekv. (3) en cirkel med radien $r = \omega \sqrt{\mu_d \epsilon_d - \mu_0 \epsilon_0} \cdot d/2$. Vi är bara intresserade av positiva α och k_y , så vi ritar bara en kvartscirkel.

Multiplitera nu ekv. (4) med $d/2$ och rita in i samma diagram. Skärningspunkter mellan kurvorna ger värden på $(\alpha d/2)$ och $k_y d/2$ för udda TM-moder. Ekv. (1) eller (2) ger sedan tillhörande β . En skiss av sambandet visas i diagrammet nedan. Kurvor för **jämna** TM-moder (enligt avsnitt 4b) finns också inlagda i samma diagram.



Första skärningspunkten TM_{udda} med $n=1$, andra $TM_{jämna}$ med $n=1$, osv

Grafisk lösning av ekv. (3) och (4).

4b. Jämna TM-moder

Fälten i skivan blir – index e =even i E_e

$$\begin{cases} \bar{E}_z^0(y) = E_e \cos k_y y \\ \bar{E}_y^0(y) = \frac{j\beta}{k_y} E_e \sin k_y y \\ \bar{H}_x^0(y) = -\frac{j\omega\epsilon_d}{k_y} E_e \sin k_y y \end{cases} \quad |y| < d/2$$

Randvillkor ger nu

$$\boxed{\alpha = -\frac{\epsilon_0}{\epsilon_d} k_y \cot \frac{k_y d}{2}} \quad \text{jämna TM-moder} \quad (5)$$

Ekvation (5) är också inritad i $(\alpha d/2) - (k_y d/2)$ -diagrammet ovan! Radien blir samma som för udda TM-moder.

2.3.2 TE-vågor

1. Ansats för TE-vågor

TE-moderna har bara H_z -komponent.

Ansats för H_z^0 i skivan

$$\bar{H}_z^0(y) = H_0 \sin k_y y + H_e \cos k_y y \quad |y| < d/2$$

2. Dispersionsrelationer

Dispersionsrelationerna blir samma som för TM-vågor ekv.(1) och (2) ovan.

3. Fält och karakteristiska relationer för TE-moder

3a. Udda TE-moder

Fälten i den dielektriska skivan blir

$$\begin{cases} \bar{H}_z^0(y) = H_0 \sin k_y y \\ \bar{H}_y^0(y) = -\frac{j\beta}{k_y} H_0 \cos k_y y \\ \bar{E}_x^0(y) = -\frac{j\omega\mu_d}{k_y} H_0 \cos k_y y \end{cases} \quad |y| < d/2$$

Randvillkoren ger

$$\alpha = \frac{\mu_0}{\mu_d} k_y \tan \frac{k_y d}{2} \quad \text{udda TE-moder} \quad (6)$$

3b. Jämna TE-moder

Fälten i den dielektriska skivan blir

$$\begin{cases} \bar{H}_z^0(y) = H_e \cos k_y y \\ \bar{H}_y^0(y) = \frac{j\beta}{k_y} H_e \sin k_y y \\ \bar{E}_x^0(y) = \frac{j\omega\mu}{k_y} H_e \sin k_y y \end{cases} \quad |y| < d/2$$

Randvillkoren ger sambandet $\alpha - k_y$

$$\alpha = -\frac{\mu_0}{\mu_d} k_y \cot \frac{k_y d}{2} \quad \text{jämna TE-moder} \quad (7)$$

Grafisk bestämning av α och k_y för udda och jämna TE-moder

Den grafiska lösningen av ekv. (3) och (6) för udda resp. ekv. (3) och (7) för jämna TE-moder liknar den för TM-moderna. Enda skillnaden är konstanterna ϵ i ekv. (4) och (5) för TM-moder bytts mot μ i ekv. (6) och (7) för TE-moder.

2.3.3 Gränsfrekvenser

Fälten i luften utanför skivan dämpas med konstanten α . För t.ex. TM-vågorna har vi för $y > d/2$ enl. s. 21 $\bar{E}_z^0(y) = C_u e^{-\alpha(y-d/2)}$

När dämpningen α går mot noll, blir vågen i luften inte längre bunden till skivan. $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = \omega_c \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ och $k_y = \omega_c \sqrt{\mu_d \epsilon_d - \mu_0 \epsilon_0}$, där ω_c = gränsvinkelfrekvensen.

Ekvation (4) och (5) med $\alpha = 0$ ger ω_c för TM-moder, ekvation (6) och (7) ger ω_c för TE-moder. Uttryckt som gränsfrekvens får man

$$f_{co} = \frac{n-1}{d\sqrt{\mu_d \epsilon_d - \mu_0 \epsilon_0}} \quad \text{udda TM- och TE-moder}$$

$$f_{ce} = \frac{n - 1/2}{d\sqrt{\mu_d \epsilon_d - \mu_0 \epsilon_0}} \quad \text{jämna TM- och TE-moder}$$

med $n = 1, 2, 3 \dots$

Lägsta gränsfrekvens $f_c = 0$ har vi för udda TM- och TE-moder med $n=1$. Utbredning sker i TM_1 eller TE_1 -moden oberoende av plattans tjocklek.

När f ökar från f_c kommer α att öka och vågen i luften dämpas alltmer i y -led. Vi får en s.k. ytvåg. Vågen koncentreras mer till den dielektriska skivan.

Exempel: Antag att en våg, t.ex. av typen TM_{udda} , utbreder sig i en dielektrisk skiva av tjockleken d . Skivan har $\mu_r = 1$ och $\epsilon_r = 2,56$. Bestäm det avstånd δ på vilket ytvågen i luft har dämpats till $1/e$ av värdet vid $y=d/2$, om skivan är mycket tjock!

Lösning: För en **mycket tjock** skiva gäller att $\beta \simeq \omega \sqrt{\mu_d \epsilon_d}$. – Vågutbredning i stort område med homogent material. – Ekv. (2) ger nu

$$\alpha \simeq \omega \sqrt{\mu_d \epsilon_d - \mu_0 \epsilon_0} = (\omega/c) \sqrt{(\mu_d \epsilon_d / \mu_0 \epsilon_0) - 1} = (2\pi/\lambda_0) \sqrt{\epsilon_r - 1}$$

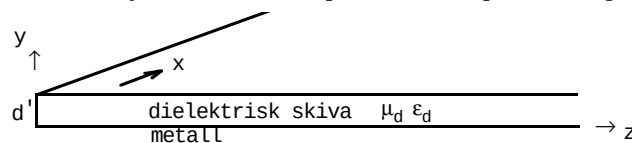
Då blir inträngningsdjupet $\delta = 1/\alpha = \lambda_0 / 2\pi \sqrt{1,56} = 0,13\lambda_0$. Ytvågen dämpas snabbt i y -led!

Man säger att vågen är **tätt bunden till den dielektriska skivan för en mycket tjock skiva**.

Om skivan däremot är mycket tunn blir vågen **löst bunden** till skivan.

2.3.4 Dielektrisk skiva på metallplan

En dielektrisk skiva med tjocklek d' , vilar på ett metallplan, beläget vid $y=0$, se fig.!



Antag att metallen är ideal. Randvillkoren vid $y=0$ blir då $\bar{E}_t(y=0) = 0$; $\bar{H}_n(y=0) = 0$; Kolla uttryck för **fälten i skivan** för TM-vågor och för TE-vågor! OBS! $y=0$ ligger mitt i den dielektriska skivan i våra tidigare uttryck!

1/ Udda TM-moder: Tangentialkomponent till metallen ($\hat{x}$ och $\hat{z}$): $\bar{E}_t = \bar{E}_z^0$, vilket blir 0 för $y=0$, se s. 21. Inget H-fält i normalens riktning, d.v.s. $\hat{y}$. Randvillkoren är uppfyllda för $y=0$! Det är alltså möjligt att lägga metall vid $y=0$, utan att fälten för $y > 0$ ändras!. Udda TM-moder kan alltså överföras! Vi får då en $d/2$ tjock dielektrisk skiva med metall. Vår skiva är dock d' tjock. **Byt $d/2$ mot d' i formlerna för $y>0$ för udda TM-moder!**

2/ Jämna TM-moder: $\bar{E}_t = \bar{E}_z^0$, vilket $\neq 0$ för $y=0$, se s. 22. Det går alltså inte att lägga metall vid $y=0$. Ingen jämn TM-mod kan överföras!

3/ Udda TE-moder: $\bar{H}_n = \bar{H}_y^0 \neq 0$ för $y=0$, se s. 23. Ej möjligt med denna mod!

4/ Jämna TE-moder: Koll av randvillkoren vid $y=0$ visar att dessa moder kan överföras, se fält på s. 23. Byt också här $d/2$ mot d' i formlerna för $y>0$ för jämna TE-moder!

Kapitel 3

Antenner

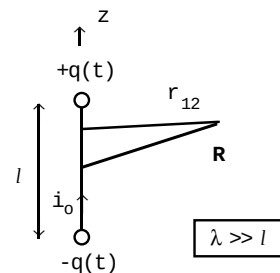
Sändarantenn. Tidvarierande laddningar och strömmar ger vågor. För att få strålningen i en bestämd riktning använder man sig av antenner. Vi studerar först dipolantennen, därefter andra antenner och grupper av antenner. Sändarantenn kan också användas som mottagarantenn. Mer om detta senare.

Det är lättast att börja med att beräkna vektorpotentialen A från en oscillerande dipol. Därefter beräknar man H - och E -fälten.

3.1 Oscillerande elektrisk dipol - Hertzdipol

Dipolladdningarna $\pm q(t)$ varierar sinusformat. Vi skriver strömmen i den korta ledaren mellan laddningarna $i_0 = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$, eller komplext $\bar{i}_0 = I_0 e^{j\alpha}$

Eftersom $\bar{i}_0 = j\omega \bar{q}$ blir dipolmomentet då $\bar{p} = \hat{z} \bar{q} l = \hat{z} \frac{\bar{i}_0}{j\omega} l$



Vi behöver retarderade storheter, dvs $i(t - r_{12}/c) =$

$= I_0 \cos[\omega(t - r_{12}/c) + \alpha] = I_0 \cos(\omega t - \beta r_{12} + \alpha)$ eller komplext

$\bar{i} = I_0 e^{j\alpha} e^{-j\beta r_{12}} = \bar{i}_0 e^{-j\beta r_{12}}$

Vågutbredningen sker i luft $\beta = \omega/c$.

Vektorpotentialen $\bar{A}(R) = \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\bar{J}(z_1)}{r_{12}} dv_1 = \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\bar{i}}{r_{12}} dz_1 =$

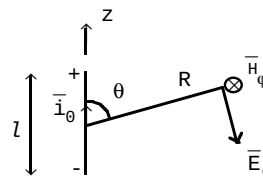
$= \hat{z} \frac{\mu_0 \bar{i}_0 l}{4\pi R} e^{-j\beta R}$ På stort avstånd R från källan, $R \gg l$, kan man räkna med samma avstånd $r_{12} = R$ till alla delar av strömfördelningen.

$\bar{H} = \nabla \times \bar{A} / \mu_0$ och $\bar{E} = \nabla \times \bar{H} / j\omega \epsilon_0$ ger $\bar{H}$ och $\bar{E}$

Approximationer: **närzon** $\beta R \ll 1$; **fjärrzon (vågzon)** $\beta R \gg 1$ – Kan också uttryckas som $R \gg \lambda$.

I **vågzonen**, $R \gg \lambda$ (och med $\lambda \gg l$) får vi fälten

$$\begin{aligned} \bar{H}(R, \theta, \varphi) &= \hat{\phi} \frac{j\omega l \bar{i}_0 \sin\theta}{4\pi c R} e^{-j\beta R} \\ \bar{E}(R, \theta, \varphi) &= \hat{\theta} Z_0 \bar{H}_\phi \quad Z_0 = \text{vågimpedansen för vakuum} \\ \bar{S} &= \bar{E} \times \bar{H}^* = \hat{R} \bar{E}_\theta \bar{H}_\phi^* \end{aligned}$$



Det är inga plana vågor, men **TEM-vågor**, så att sambandet $\bar{H} = \bar{E}/Z_0$ gäller i **vågzonen**! En **enklare ansats** för $\bar{E}$ och $\bar{H}$, om man inte är intresserad av antennstorheterna är

$$\bar{E}_\theta = C \frac{\sin\theta}{R} e^{-j\beta R} \quad \bar{H}_\phi = \bar{E}_\theta / Z_0$$

Konstanten C kan t.ex bestämmas ur uppgift om totalt utstrålad effekt från antennen.

[Fälten i strålningszonen från en Hertzdipol kan också skrivas

$$\vec{H}(\mathbf{R}) = \frac{j\omega \vec{I}_0}{4\pi c R} e^{-j\beta R} \hat{p} \times \hat{R}$$

$$\vec{E}(\mathbf{R}) = Z_0 \vec{H}(\mathbf{R}) \times \hat{R} = Z_0 \frac{j\omega \vec{I}_0}{4\pi c R} e^{-j\beta R} [\hat{R} (\hat{p} \cdot \hat{R}) - \hat{p}]$$

där $\hat{p}$ är dipolmomentets riktning. Denna form kan vara "lättare" att använda, då dipolen inte ligger efter z-axeln och fältet ska bestämmas i en godtycklig punkt $\mathbf{R}$.

OBS! Använd de enkla formlerna i första hand!]

Exempel: En Hertzdipol i fri rymd utstrålar den totala effekten 16 kW med frekvensen 100 MHz. Beräkna E-fältets maximala toppvärde på avståndet 100 km från antennen!

$f = 100 \text{ MHz} \Rightarrow \lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 10^8 = 3 \text{ m} \ll R = 10^5 \text{ m}$. Vi söker alltså E-fältet i vågzone och antar

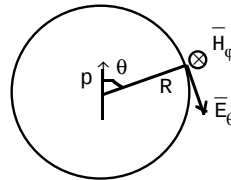
$$\vec{E}_\theta = c \frac{\sin\theta}{R} e^{-j\beta R} \quad \text{och} \quad \vec{H}_\phi = \vec{E}_\theta / Z_0$$

Det är också enklare att beräkna utstrålad effekt i vågzone.

Totalt utstrålad effekt

$$P_{\text{medel}} = \frac{1}{2} \int \text{Re}\{\vec{E}_\theta \vec{H}_\phi^*\} \cdot d\mathbf{a}$$

integrerat över en sfär runt om dipolen



Ett ytelement på sfärens yta $da = 2\pi R \sin\theta R d\theta \Rightarrow$

$$P_{\text{medel}} = \frac{|C|^2}{2Z_0} \int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{R^2} 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = \frac{|C|^2 \pi}{Z_0} \cdot \frac{4}{3} = 16 \cdot 10^3$$

$$\Rightarrow |C| = 1,2 \cdot 10^3$$

Maximala toppvärdet av E har vi för $\theta = \pi/2$.

$$|\vec{E}|_{\text{max}} = |C| \frac{\sin(\pi/2)}{R} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}$$

= = = = =

3.1.1 Strålningsdiagram

Strålningsdiagram är ett diagram, där $|\vec{E}|$ i strålningszonen kan avläsas – för konstant R – i olika riktningar från antennen. Diagrammet kan också visa effekten ($\sim |\vec{E}|^2$).

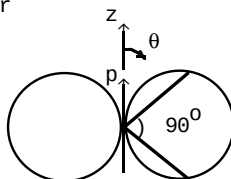
Exempel: En Hertzdipol har $\vec{E}_\theta = \frac{C}{R} \sin\theta e^{-j\beta R}$

$|\vec{E}_\theta| \sim \sin\theta$ (för visst R) med max för $\theta = \pi/2$

Strålningsdiagrammet blir

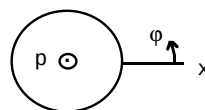
i θ -planet:

cirklar



i ϕ -planet: $E = \text{konst}$

oberoende av ϕ



Lobbredd (beamwidth på engelska): Vinkeln mellan halveffektpunkterna ($E = E_{\text{max}}/\sqrt{2}$ där). För Hertzdipolen får man lobbreddden i θ -planet

$\sin\theta = \sin\theta_{\text{max}}/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$ för $\theta = 45^\circ$ och $\theta = 135^\circ$.

Lobbredd $135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$, se fig. t.v. ovan!

3.2 Varierande strömfördelning, längre antenner - spröstantenner

För den korta dipolantennen räknade vi med konstant strömamplitud I_0 , $i(t) = I_0 \cos \omega t$. I praktiken varierar strömmens **amplitud** längs antennen $I_0 = I_0(z)$ och kan t.ex. vara z-beroende på dessa sätt:



För sinusformad variation i amplituden blir $I_0(z) = I_m \sin[\beta(\ell/2 - |z|)]$, där $I_m = \max$ strömamplitud och ℓ är antenntlängden.

Beräkningsmetod: Dela in antennen i element Δz . Varje Δz betraktas som en Hertz-dipol, som ger ett E-fält ΔE . Addera bidragen, d.v.s. integrera över antenntlängden ℓ .

Om antenntlängden inte är mycket mindre än våglängden, blir integralerna komplicerade. För **halvvågsdipolen**, $\ell = \lambda/2$, se vidare i Cheng avsnitt 10-4.1! Uttrycken för $\bar{E}_{\lambda/2}$ och $\bar{H}_{\lambda/2}$ finns också i Formelsamlingen.

För $\ell < \lambda/4$ får man ett resultat som visar att man kan räkna med en **effektiv antennlängd** ℓ_{eff} i Hertzdipolformlerna. $\ell_{\text{eff}} = \ell/2$ för $\ell < \lambda/4$

Laddningsfördelning på antennen

Om strömamplituden är konstant, får man bara laddning i ändarna på antennen. När strömamplituden $I_m = I_m(z)$ får man en laddningsfördelning $\rho_\ell(z)$ på antennen. Kontinuitetsekvationen $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\partial Q/\partial t$ tillämpad på elementet Δz ger $\rho_\ell(z)$. Se t.ex. uppgift 3-10 i Exempelsamlingen!

3.3 Strålningsresistans

Genom att integrera medelvärdet av poyntingvektorn $\frac{1}{2}\{\bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{H}}^*\}$ över en sfärisk yta med radien R runt antennen får man totalt utstrålad effekt.

Definition av **strålningsresistans**:

$$P_{\text{utstrålad}} = R_{\text{stråln}} I_e^2 = R_{\text{stråln}} I_0^2 / 2$$

där I_e är antennströmmens effektivvärde, I_0 dess toppvärde (maximala toppvärde om strömmen beror av z)

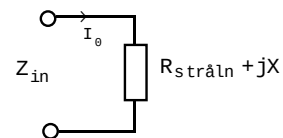
Strålningsresistansen är en **tänkt** resistans med samma effektutveckling som den utstrålade effekten.

I antennens inimpedans ingår också förluster i antennen – beräknas i nästa avsnitt –.

Vi försummar oftast dessa och räknar med $R_{\text{in}} = R_{\text{stråln}}$, se fig. ovan! Vi får också en imaginärdel X i inimpedansen. X är kapacitiv (<0) för en kort dipolantenn, induktiv (>0) för en halvvågstantenn. – Vi beräknar inte X i kursen! –

$$R_{\text{stråln, Hertz}} = 80\pi^2(\ell/\lambda)^2; \quad R_{\text{stråln, } \lambda/2} = 73,1 \Omega;$$

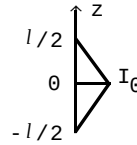
Man vill ha stor strålningsresistans. Hertzdipolen har $\ell \ll \lambda$ och således en mycket låg strålningsresistans!



3.4 Förluster i antennen

Exempel: Beräkna den joulska effektförlusten för en sprötdipol med längden ℓ , radien a , konduktiviteten σ och med triangulär strömfördelning enl. fig. Frekvensen är så hög att vi har skineffekt.

$$\text{Strömmplituden } I(z) = I_0 - \frac{2I_0}{l} z$$



Eftersom $I=I(z)$ måste vi teckna effekten dP i elementet dz och integrera.

$$dP = \frac{1}{2} dR I^2(z) \quad \text{där resistansen } dR = \frac{dz}{\sigma 2\pi a \delta} \quad \text{och} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}}$$

$$P_{\text{förlust}} = 2 \frac{1}{2} \int_0^{l/2} I_0^2 \left(1 - \frac{2z}{l}\right)^2 \frac{dz}{\sigma 2\pi a \delta} = \dots = \frac{I_0^2 l}{12\pi \sigma a \delta} = \frac{1}{2} R_{\text{förlust}} I_0^2$$

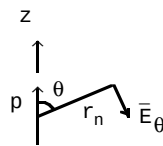
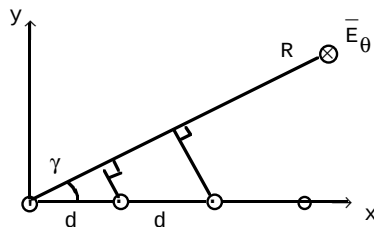
$$\text{Antennens verkningsgrad } \eta = \frac{P_{\text{utstrålad}}}{P_{\text{utstrålad}} + P_{\text{förlust}}} = \frac{R_{\text{stråln}}}{R_{\text{stråln}} + R_{\text{förlust}}}$$

$R_{\text{stråln}}$ och $R_{\text{förlust}}$ är tänkta resistanser.

3.5 Gruppantennor

Vi har N likadana korta sprötdipoler placerade längs x -axeln och riktade i z -led., se fig!
De komplexa antennströmmarna är

$$\bar{I}_n = I_n e^{jn\xi} \quad n = 0, 1 \dots (N-1)$$



dipol n riktad i z -led
 r_n = avstånd till observationspunkten

R ligger inte i papperets plan. γ = vinkeln mellan R och x -axeln
 $\mathbf{E}_\theta \perp \mathbf{R}$

$$\text{Från varje dipol har vi fältet } \bar{E}_\theta = Z_0 \frac{j\omega l_{\text{eff}} \bar{I}_n \sin\theta}{4\pi c r_n} e^{-j\beta r_n}$$

Vi räknar approximativt med avståndet till observationspunkten $r_n = R$ i nämnaren, noggrannare i exponenten.

$$r_2 \simeq R - d \cos\gamma; \quad r_3 \simeq R - 2d \cos\gamma \quad \text{o.s.v.}$$

$$\cos\gamma \text{ fås lättast av } \cos\gamma = \hat{R} \cdot \hat{x} = \sin\theta \cos\varphi$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{\text{tot}} &= \hat{\theta} (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \dots) = \hat{\theta} Z_0 \frac{j\omega l_{\text{eff}} \sin\theta}{4\pi c R} [I_0 e^{j0} e^{-j\beta R} + I_1 e^{j\xi} e^{-j\beta(R-d\cos\gamma)} + \\ &+ I_2 e^{j2\xi} e^{-j\beta(R-2d\cos\gamma)} + \dots] = \hat{\theta} Z_0 \frac{j\omega l_{\text{eff}} \sin\theta}{4\pi c R} e^{-j\beta R} [I_0 + I_1 e^{j\psi} + I_2 e^{j2\psi} + \dots] \end{aligned}$$

$$\text{där } \psi = \xi + \beta d \cos\gamma = \xi + \beta d \sin\theta \cos\varphi$$

Vi är intresserade av hur $|\bar{E}_{\text{tot}}|$ beror av θ och φ .

$$|\bar{E}_{\text{tot}}| \sim \sin\theta |I_0 + I_1 e^{j\psi} + I_2 e^{j2\psi} + \dots|$$

Om vi har samma strömmamplitud i antennerna får vi

$$\begin{aligned}\bar{E}_{\text{tot}} &\sim \sin\theta [1 + e^{j\Psi} + e^{j2\Psi} + \dots] = \sin\theta \frac{1 - e^{jN\Psi}}{1 - e^{j\Psi}} = \\ &\quad \text{geometrisk serie, summerad} \\ &\quad \text{för } N \text{ element} \\ &= \sin\theta \frac{e^{jN\Psi/2} \sin N\Psi/2}{e^{j\Psi/2} \sin \Psi/2} = \sin\theta e^{j(N-1)\Psi/2} \frac{\sin N\Psi/2}{\sin \Psi/2}\end{aligned}$$

Genom val av strömmamplituder, fasförskjutning ξ och avstånd d kan man få gruppantennen att stråla på önskat sätt.

I löst exempel 10-6 i Cheng visas strålningsdiagram för en gruppantenn med två dipoler för två olika val av ξ och d .

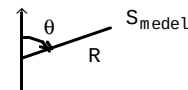
3.6 Antennförstärkning, effektiv antennyta mm

Några begrepp för sändarantennar resp. mottagarantennar.

3.6.1 Sändarantennar

Antennförstärkning (directive gain) $G_D(\theta, \varphi)$
(ett mått på hur mycket antennen strålar i en viss riktning)

$$G_D(\theta, \varphi) = \frac{S_{\text{medel}}(R, \theta, \varphi) \cdot 4\pi R^2}{P_{\text{uts trålad}}}$$



S_{medel} = tidsmedelvärde av poyntingvektorn i en viss punkt (R, θ, φ)

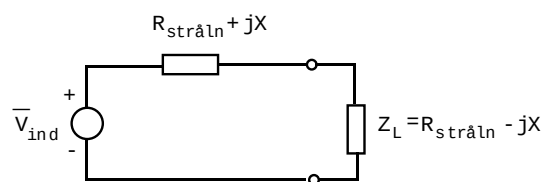
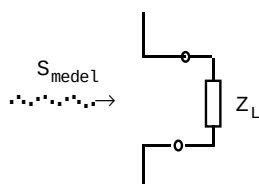
$P_{\text{utstrålad}}$ = tidsmedelvärde av från antennen utstrålad effekt.

Direktivitet $D = G_{D \text{ max}}$

$D_{\text{Hertzdipol}} = 1,5$; $D_{\lambda/2} = 1,64$

3.6.2 Mottagarantennar

En mottagarantenn är belastad med impedansen Z_L . Figuren nedan visar också en ekvivalent elektrisk krets med anpassad last.



Ekvivalent krets för mottagarantenn
med anpassad last Z_L

Man räknar approximativt med att antennens impedans vid mottagning är samma som impedansen vid sändning.

Inducerad spänning i antennen $\bar{V}_{\text{ind}} = \bar{E} \ell_{\text{eff}}$ för en kort dipolantenn, om den är inställd för bästa mottagning.

Effektiv antennyta

$$A_e = \frac{P_L}{S_{\text{medel}}}$$

där P_L = tidsmedelvärde av effekt i belastning, anpassad till antennen

S_{medel} = tidsmedelvärde av poyntingvektorn vid antennen

Samband för en antenn använd som **sändare** (G_D) och **mottagare** (A_e) vid strålning i samma riktning (θ, φ) och med samma polarisation:

$$G_D(\theta, \varphi) = A_e(\theta, \varphi) \cdot 4\pi/\lambda^2$$

Reflexion mot föremål:**Radartvärsnitt**

$$\sigma_{\text{radar}} = 4\pi R^2 \frac{S_{\text{spridd}}}{S_{\text{inf}}}$$

S_{inf} = tidsmedelvärde av poyntingvektorn för infallande våg vid föremålet.

S_{spridd} = tidsmedelvärdet av poyntingvektorn för den spridda vågen vid mottagaren.

R = avstånd mellan föremål och mottagare.

3.6.3 Två antenner, sändare och mottagare**Friis formel**

$$\frac{P_L}{P_{\text{ut}}} = \frac{G_{D1} G_{D2} \lambda^2}{(4\pi R)^2}$$

G_{D1} och G_{D2} = antennförstärkning för resp. antenn.

P_{ut} = effekt utsänd från antenn 1.

P_L = effekt i anpassad last till antenn 2

R = avstånd mellan antennerna.

3.6.4 Samma antenn som sändare och mottagare

En våg sänds ut från en antenn, reflekteras mot ett föremål och tas emot av **samma** antenn.

Radarekvationen

$$\frac{P_L}{P_{\text{ut}}} = \frac{\sigma_{\text{radar}} \lambda^2}{(4\pi)^3 R^4} G_D^2$$

där P_{ut} = effekt utsänd från antennen

R = avstånd till föremålet med radartvärsnittet σ_{radar}

P_L = effekt i anpassad last vid mottagaren

051217 EP

Index

ansats

- cirkulär vågledare
 - TE, 19
 - TM, 18
- dielektrisk vågledare
 - TE, 22
 - TM, 21
- rekt. vågledare
 - TE, 15
 - TM, 15

antenn

- förluster, 28
- inducerad spänning, 29
- laddningsfördelning, 27
- verkningsgrad, 28

antennförstärkning, 29

beräkning av C, L, G, R för ledning, 3

dipolmoment, 25

direktivitet, 29

effektiv antennlängd, 27

effektiv antennyta, 29

ekvivalent krets

- ledning, 2
- mottagarantenn, 29
- sändarantenn, 27

fashastighet

- ledning
 - små förluster, 3
 - stat.sinus, 1
- vågledare, 15

fjärrzon, 25

Friis formel, 30

gruppantenn, 28

grupphastighet, 15

- vågledare, 15

gränshastighet

- rekt. vågl, 14

gränsvinkelfrekvens

- cirkulär, 19

halvvågsantenn, 27

Hertzdipol, 25

hålrumresonator

- cirkulär, 20
- rektangulär, 16

inimpedans

- ledning, 2
- förlustfri, 2

karaktäristisk impedans

- stat.sinus, 1
- transient, 5

Laplacetransformering, 6

Laplaceuttryck

- enkla, 7
- spänning på ledning, 7
- ström på ledning, 8

ledning, 1

- anpassning, 13
- förlustfri
 - transienter, 5
- förlustfri
 - stat. sinus, 2
- inimpedans, 2
- som kretselement, 3

lobbredd, 26

löptid, 5

moder

- rekt vågledare, 14

mottagarantenn, 25, 29

närzon, 25

radarekvationen, 30

radartvårsnitt, 30

reflexionsdiagram, 6

reflexionsförhållandet, 2

reflexionskoefficient, 2

resonansvinkelfrekvens

- cirkulär resonator, 20
- rektangulär resonator, 16

resonator

- cirkulär, 20
- rektangulär, 16

Smithdiagram, 10

- admittanser, 12
- anpassning, 13
- härledning, 10
- impedanser, 11
- sammanfattning, 13
- stående vågförhållande, 12

sprötagantenn, 27

spänningsmax

- ledning, 3

spänningsmin

- ledning, 3

spänningsvåg, 1

strålningsdiagram, 26

strålningsresistans, 27

strömvåg, 1

stående vågförhållande, 3

sändarantenn, 25, 29

TE-våg, 1

TEM-våg, 1

TM-våg, 1

totalimpedans, 2

transienter

- flera ledningar, 9
- förlustfri ledning, 5
- ledning
 - begynnelseenergi, 9

transmissionslinje

- små förluster, 15

vågimpedans, 17

vågledare, 14

- cirkulär, 18
- dielektrisk, 20
- ideal, 14
- rektangulär, 14
- små förluster, 15

vågor

- ledning, 1

vågutbredning

- parallella plan, 16

vågutbredningshastighet

- transient, 5

vågutbredningskonstant, 17

- ledning

- förlustfri, 2
- stat.sinus, 1
- transient, 5

vågledare

- cirkulär, TE, 19
- cirkulär, TM, 18
- dielektrisk, TE, 22
- dielektrisk, TM, 21
- rektangulär, 14

vågzon, 25